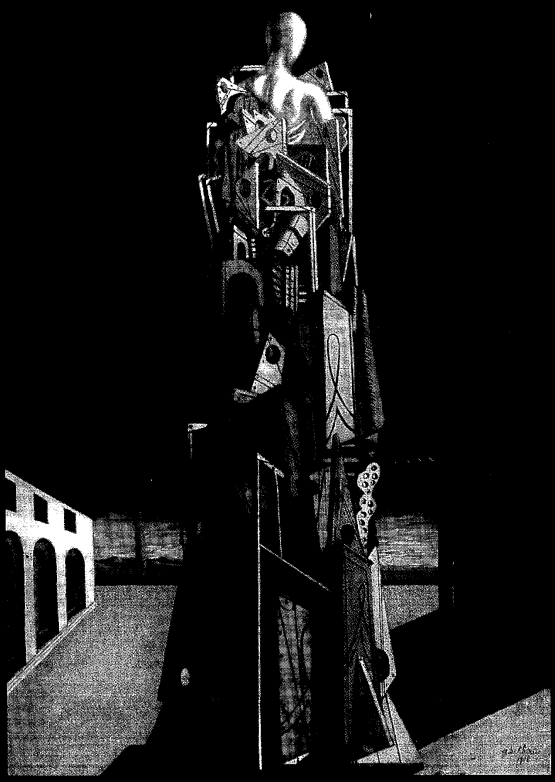
B. C. U. Timişoara
600.531
C

MODALITATE ŞI INCOMPLETITUDINE

Logica modală ca logică de ordin superior



MIRCEA DUMITRU

PAIDEIA

© Copyright by Mircea Dumitru 2001

Toate drepturile pentru prezenta versiune în limba română sunt rezervate.
Nici o parte din prezentul text nu poate fi reprodusă
fără acordul scris al autorului

Editura Paideia, 2001
Str. Bucur nr. 18, sector 4
75104 Bucureşti, România
tel.: (00401) 330.80.06; 330.16.78
fax: (00401) 330.16.77

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
DUMITRU, MIRCEA
Modalitate şi incompletitudine / Mircea Dumitru.
Bucureşti : Paideia, 2001
246 p. ; 23,5 cm.
Bibliogr.
Index.
ISBN 973-596-003-3

Mamei mele, Minerva-Aurora Dumitru
şi memoriei tatălui meu, Aureliu Dumitru

Mulțumiri

Cartea pe care o aveți în față își are originea în teza mea de doctorat, *On Incompleteness in Modal Logic. An Account Through Second-Order Logic*, susținută în mai 1998 la Tulane University, New Orleans, S. U. A. Se cuvine, de aceea, ca gândurile mele de recunoştință şi de respect să se îndrepte în primul rând către aceia care, într-un fel sau altul, au făcut acest lucru posibil pentru mine.

Sunt recunoscător multor oameni din Departamentul de Filosofie de la Tulane University, S. U. A. şi din Facultatea de Filosofie de la Universitatea din Bucureşti, care m-au ajutat, în diferite moduri, într-o lungă perioadă de timp, să duc la bun sfârşit acest proiect. Aş dori să mulțumesc comisiei mele doctorale – Profesorilor Graeme Forbes, Bruce Brower şi Donald Lee – pentru încurajare şi sprijin constant. În mod special, cea mai mare datorie intelectuală o recunosc față de Profesorul Graeme Forbes, coordonatorul studiilor şi mentorul întregii mele activități de doctorand la Tulane University. Aceia care-i cunosc lucrările în domeniul logicii modale vor vedea că influența pe care a exercitat-o asupra înțelegerii de către mine a subiectului este profundă. Doresc apoi să aduc mulțumiri Profesorului Radu Bogdan, din acelaşi Departament, pentru nenumăratele feluri în care m-a ajutat şi pentru sprijinul său moral constant de-a lungul întregii perioade de studiu petrecute la Tulane.

Îi mulțumesc de asemenea Profesorului Melvin Fitting, de la City University of New York, pentru unele observații critice care au condus la îmbunătățirea expunerii materialului şi pentru semnalarea unor erori tehnice. Îi sunt, totodată, recunoscător pentru amabilitatea cu care a acceptat să scrie postfața acestei monografii.

De cealaltă parte a Atlanticului, în România, la Universitatea din Bucureşti, datorez multora dintre profesorii mei, care acum îmi sunt colegi şi prieteni, cu mult mai mult decât pot spune cuvintele. Dar cel mai mult sunt recunoscător pentru mulți ani de formare intelectuală, discuții şi ajutor generos mentorului şi coordonatorului activității mele ca student la Universitatea din Bucureşti, Profesorul Mircea Flonta, şi dascălilor mei de la aceeaşi Universitate, Profesorii Petre Bieltz, regretatul Gheorghe Enescu, Adrian Miroiu, Ilie Pârvu, Cornel Popa, Dragan Stoianovici şi Sorin Vieru, care m-au învățat logică şi multe alte lucruri care contează de fapt în viață.

Pe un plan diferit, ştiu că datorez cu mult mai mult decât pot chiar să-mi dau seama şi decât pot să dau înapoi vreodată soției mele, Elena Dumitru, şi fetei noastre, Ioana-Andrada Dumitru. Ele au fost un sprijin constant şi o sursă de inspirație, linişte şi stabilitate în perioada studiilor doctorale la Tulane University, care a fost foarte solicitantă şi uneori frustrantă pentru noi toți.

Dar primele şi cele mai profunde gânduri de recunoştință, care însoțesc producerea prezentei monografii şi atingerea acestui nivel de educație pentru care m-am străduit atât de mulți ani, le datorez părinților mei. Fără ei, *nimic* nu ar fi putut să fie posibil pentru mine şi cu atât mai mult drumul care m-a dus la prezenta lucrare. De aceea mamei mele, Minerva-Aurora Dumitru, pentru voința şi abnegația ei puternice, şi memoriei tatălui meu, Aureliu Dumitru, cititor avid şi autentic iubitor de înțelepciune, le dedic cu recunoştință şi dragoste această lucrare a multor ani de strădanii.

Autorul

Mai 2001, Bucureşti

Cuprins

CUVÂNT ÎNAINTE 9

INTRODUCERE 11

CAPITOLUL 1. Uneltele şi fundalul 19

CAPITOLUL 2. Un sistem modal normal incomplet 49
Remarci asupra validităţii modale, cadrelor şi modelelor 49
Sistemul incomplet VB 57
Comentarii asupra demonstraţiei de incompletitudine a sistemului VB 76

CAPITOLUL 3. Incompletitudinea modală ca fenomen de ordinul al doilea 109
O schiţă a logicii de ordinul al doilea 113
Lexiconul limbajului logicii de ordinul al doilea 116
Sintaxa limbajului logicii de ordinul al doilea 118
Semantici pentru limbajul logicii de ordinul al doilea 120
Semantica standard pentru limbajul logicii de ordinul al doilea 122
Semantica Henkin pentru limbajul logicii de ordinul al doilea 124
Reguli de inferenţă pentru cuantori de ordinul al doilea 130
Incompletitudinea logicii de ordinul al doilea cu semantică standard versus completitudinea logicii de ordinul al doilea cu semantică Henkin 131
Traducerea canonică a limbajului logicii modale a propoziţiilor în limbajul logicii de ordinul al doilea 144
Corelarea semanticii modale cu semantica de ordinul al doilea 148
O abordare a completitudinii modale prin logica de ordinul al doilea 151
Cel de-al doilea argument bazat pe logica de ordinul al doilea pentru existenţa sistemelor modale complete 158
Explicarea incompletitudinii modale prin logica de ordinul al doilea 162

CAPITOLUL 4. Este logica de ordinul al doilea o ***logică***? 187
Dezacordurile lui Quine cu logica de ordinul al doilea 192
Un argument pentru logica de ordinul al doilea 201
Un alt argument (prospectiv) pentru logica de ordinul al doilea 215

POSTFAŢĂ 229

BIBLIOGRAFIE 233

INDEX 241

Cuvânt înainte

Dintre toate sub-ramurile logicii formale, logica modală poartă cu sine promisiunea cea mai mare a unei contribuții la elucidarea unor chestiuni filosofice. Aceasta se întâmplă, în primul rând, pentru că în formularea multora dintre problemele centrale ale filosofiei se apelează în mod crucial la concepte modale. Astfel, problema cauzalității, potrivit lui Hume, este aceea dacă poate exista o conexiune necesară între evenimente. Problema libertății voinței este dacă există vreun sens interesant în care este posibil ca agenții să acționeze în mod diferit față de modul în care acționează ei de fapt. Problema esenței este dacă fiecare lucru individual este posesorul unei anumite proprietăți, sau unor proprietăți, fără de a căror posedare existența acelui individ este imposibilă. Probleme din epistemologie se pot dovedi a fi întrebări despre anumite posibilități aparente – dacă acestea sunt posibilități autentice sau nu. De aceea dezvoltarea modernă a logicii modale aduce cu sine speranța dobândirii unei înțelegeri mai adânci a acestor chestiuni.

Dar logica modală este ea însăși un obiect interesant din punct de vedere filosofic. Chiar la nivelul logicii propoziționale, extravaganța ontologică a semanticii lumilor posibile motivează interpretări filosofice ale acesteia, fără de care autoritatea ei în chestiuni privitoare la validitatea argumentelor modale ar fi suspectă. Iar bogata varietate de sisteme pe care le produce semantica lumilor posibile ridică întrebări despre comportamentul conceptelor noastre modale, care cu greu ar fi putut fi formulate în lipsa acestui aparat formal.

Cu toate acestea, spre sfârșitul anilor 1960, se părea că problemele matematice majore legate de sistemele modale fuseseră, în linii generale, rezolvate: fiecare sistem modal este caracterizat de către o clasă de modele singularizată prin stipulări asupra

relației de posibilitate relativă. Descoperirea de către K. Fine şi S. K. Thomason a unor sisteme necaracterizabile a schimbat imaginea acceptată şi, în felul acesta, a fost deschis un nou capitol, mai dificil, în investigarea formală a logicii modale.

În această carte, Mircea Dumitru dă o descriere atentă şi detaliată a fundalului acestor cercetări. El expune apoi o demonstrație a incompletitudinii unui anumit sistem, datorat lui Van Benthem, şi explică modul în care poate fi conceput rezultatul în cadrul logicii (non-modale) de ordinul al doilea. Logica de ordinul al doilea este ea însăşi controversată din punct de vedere filosofic şi Mircea Dumitru examinează anumite considerații în apărarea ei, care pot fi găsite în lucrări recente ale lui George Boolos şi extinde totodată aceste considerații printr-o argumentare personală. Cititorul va găsi în Mircea Dumitru un ghid sigur şi competent pentru acest teren accidentat şi dificil.

Graeme Forbes

Tulane University, New Orleans

Mai 1999, New Orleans

Introducere

Toposul general al acestei cărți este explicarea fenomenului semantic al incompletitudinii anumitor sisteme modale normale prin intermediul incompletitudinii logicii de ordinul al doilea. Lucrarea va fi dezvoltată în patru capitole, care urmează după o introducere a problemelor şi a metodologiei generale. Ele se aşează într-o structură bipartită: primele trei capitole sunt tehnice, iar cel din urmă, mai filosofic. În general vorbind, principala temă care va fi abordată este în ce constă problema existenței sistemelor modale normale incomplete? Dezvoltarea semanticii de tip Kripke pentru logica modală a fost susținută de ideea directoare că (poate) toate sistemele axiomatice, sau sistemele de deducție naturală pentru bine-cunoscutele sisteme modale sunt caracterizabile de către clase de cadre şi de modele definite prin condiții de ordinul întâi impuse asupra unei relații binare (de accesibilitate). Totuşi, descoperirea anumitor sisteme modale incomplete (necaracterizabile) de către S. K. Thomason, K. Fine, G. Boolos şi G. Sambin, şi J. F. A. K. Van Benthem a subminat caracteristica globalizantă a abordării stil Kripke. Există logici care nu sunt determinate de către nici o clasă de cadre Kripke. Această descoperire a fost încărcată de semnificație. Ea a respins conjectura că *toate* sistemele modale sunt caracterizabile şi că pe această cale orice sistem modal poate fi "semanticizat" printr-o abordare de tip Kripke.

Scopul meu aici este să dau o explicație adecvată formal şi clarificatoare filosofic incompletitudinii modale pe baza conceptului că logica modală este esențialmente o logică de ordinul al doilea în natura ei. Sistemele modale pot fi

analizate în termenii unor structuri cu un domeniu de indivizi de ordinul al doilea (submulțimi), care sunt atribuiți prin interpretări variabilelor propoziționale ale limbajelor logicii modale propoziționale. Astfel, existența sistemelor modale incomplete poate fi explicată prin incompletitudinea logicii de ordinul al doilea.

Capitolul 1 va elucida unele dintre multiplele sensuri ale mănunchiului de concepte 'completitudine' / 'incompletitudine' / 'caracterizare' în relație cu conceptele de model, clasă de modele, cadru şi clasă de cadre. Vor fi explicate şi discutate pe larg elementele esențiale ale tehnicii Modelului Canonic de demonstrare a completitudinii sistemelor modale normale, care generalizează demonstrația de tip Henkin a completitudinii logicii non-modale de ordinul întâi la sistemele modale.

Pe fundalul construcției aparatului semantic al demonstrării completitudinii în logica modală, s-a făcut conjectura că *oricărui* sistem modal normal i se poate da o caracterizare prin intermediul Modelului său Canonic. Oricum, acum noi ştim că există sisteme modale axiomatice (sau de deducție naturală) care nu pot să *demonstreze toate* secvențele care sunt *valide* în clasa tuturor cadrelor față de care sistemele sunt corecte semantic. Cu alte cuvinte, s-a demonstrat că există sisteme modale incomplete şi prezentarea unui astfel de sistem (datorat lui Van Benthem) este realizată în detaliu în Capitolul 2.

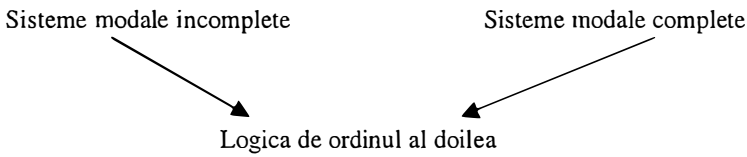
Este important să facem o observație colaterală aici. Trebuie să facem o distincție între conceptul de incompletitudine produs în contextul sistemelor modale incomplete şi conceptul similar produs de către Prima Teoremă de Incompletitudine a lui Gödel. Voi explica mai în amănunt fondul acestei observații în Capitolul 3. Este important să fim clari asupra acestui punct, pentru a risipi posibila confuzie că incompletitudinea modală se află pe ácelaşi plan cu incompletitudinea gödeliană a aritmeticii formale de ordinul întâi. Această confuzie poate fi, totuşi, produsă de către

acțiunea a (cel puțin) doi factori. Anume (i) există o relație logică autentică între incompletitudinea gödeliană a aritmeticii formale de ordinul întâi şi incompletitudinea logicii de ordinul al doilea, iar cea din urmă este folosită drept *explanans* pentru incompletitudinea modală. Şi (ii) logica modală este utilizată, în ultima vreme, în aşa-numita logică a demonstrabilității, pentru a studia teoremele de incompletitudine ale lui Gödel. Cu toate acestea, incompletitudinea modală este un fenomen distinct care are propria sa semnificație.

Din cele spuse până aici, se developează cu putere următoarea imagine: conceptul director al cercetării mele este acela că incompletitudinea modală urmează a fi explicată în termenii incompletitudinii logicii de ordinul al doilea, deoarece limbajul modal este esențialmente un limbaj de ordinul al doilea. De aceea, o schemă precisă de traducere recursivă a limbajului logicii modale în limbajul logicii de ordinul al doilea va fi construită şi discutată în Capitolul 3. Aceasta va da un înțeles precis ideii că limbajele modale şi, prin urmare, sistemele modale pot fi reduse la limbaje de ordinul al doilea. Aceste scheme de traducere recursivă ridică unele probleme legate de conservarea înțelesului propozițiilor modale prin procedurile de traducere în propoziții de ordinul al doilea. Între acestea, locul principal îl ocupă întrebarea cum se corelează semnificațiile (semantica) propozițiilor modale cu structurile de ordinul al doilea.

O problemă crucială care trebuie clarificată în Capitolul 3 este generată de următoarea rezervă. Dacă incompletitudinea unor sisteme modale urmează să fie explicată în termenii incompletitudinii omoloagelor lor de ordinul al doilea, atunci cum se face că există, totuşi, multe sisteme modale complete (caracterizabile), care şi ele pot fi corelate, la fel de bine, cu structuri de ordinul al doilea prin intermediul aceleiaşi proceduri recursive? Avem nevoie, aşadar, de o explicație pentru faptul că

majoritatea sistemelor modale normale cunoscute sunt complete, căci, la urma urmei, o aplicare a schemelor recursive de traducere asupra lor va avea drept rezultat tot o corelare a propozițiilor lor modale cu propoziții de ordinul al doilea.



Schițez aici un argument care urmăreşte să arate că reducerea sistemelor modale la sisteme de ordinul al doilea este totuşi eficientă pentru înțelegerea incompletitudinii modale, chiar dacă aceeaşi procedură recursivă poate fi aplicată sistemelor modale complete, care vor fi şi ele, pe această cale, corelate cu structuri de ordinul al doilea. Astfel, atunci când spunem că logica de ordinul al doilea este incompletă, ceea ce vrem să spunem în primul rând este că nu există nici un sistem deductiv de ordinul al doilea care să fie atât *corect* cât şi *complet* față de semantica standard pentru un limbaj de ordinul al doilea. Acum, ceea ce vom găsi, în mod tipic, în cazul traducerii sistemelor modale *complete*, cum sunt K, T, S4, B, sau S5, este, în general vorbind, ceva de felul următor. După ce traducem axiomele şi regulile de transformare ale unui astfel de sistem modal complet în notația de ordinul al doilea corespunzătoare lor şi "mimăm" sistemul modal complet în interiorul omologului său de ordinul al doilea, completitudinea acelui sistem modal revine la faptul că *toate* propozițiile de ordinul al doilea care sunt *consecințe semantice* ale omoloagelor de ordinul al doilea ale axiomelor acelui sistem modal sunt *exact* omoloagele de ordinul al doilea ale propozițiilor modale care sunt *consecințele deductive* în cadrul acelui sistem modal complet, adică sunt *exact* omoloagele de ordinul al doilea ale teoremelor

acelui sistem modal complet. Aproximativ vorbind, orice poate fi inferat într-un sistem logic de ordinul al doilea din traducerile de ordinul al doilea ale axiomelor unui sistem modal complet, folosind pentru inferare omoloagele de ordinul al doilea ale regulilor de transformare ale acelui sistem modal, este o omoloagă a unei teoreme a acelui sistem modal complet.

Pe de altă parte, în cazul unui sistem modal *incomplet*, situația care se obține este, în mare vorbind, de genul următor. Se începe cu traducerile de ordinul al doilea ale axiomelor şi ale regulilor de transformare ale unui sistem modal incomplet. Atunci, *incompletitudinea* lui constă în existența unor *consecințe logice* (*semantice*) ale omoloagelor de ordinul al doilea ale axiomelor modale, care pot fi inferate folosind omoloage de ordinul al doilea ale regulilor modale de transformare, dar care nu sunt omoloage ale nici unei *teoreme modale* a acelui sistem modal incomplet. Prin urmare, există o propoziție de ordinul al doilea, care este traducerea unei propoziții modale, conform unor scheme recursive de traducere, din limbajul acelui sistem modal în limbajul unui sistem de ordinul al doilea, şi care este *validă* în clasa structurilor de ordinul al doilea care sunt omoloagele clasei de cadre relativ la care sistemul modal incomplet este *corect*, şi care propoziție de ordinul al doilea este de aşa natură încât omoloaga sa modală nu este *derivabilă ca teoremă* în acel sistem modal incomplet. Aşadar, acel sistem modal nu este complet, relativ la clasa de cadre *pentru* acel sistem, adică relativ la acea clasă de cadre față de care sistemul este, totuşi, *corect*. În consecință, sistemul nu este caracterizabil şi este incomplet într-un sens absolut.

Ultimul capitol al acestei monografii va aborda chestiuni cu caracter mai filosofic, care sunt generate de dezvoltarea aparatului formal. Printre acestea, un loc aparte îl va avea, desigur, discutarea statutului logicii de ordinul al doilea ca o logică

autentică. În final, aceasta ne va da o explicație lămuritoare a motivului pentru care, și a modului în care incompletitudinea logicii modale poate fi pusă în legătură cu incompletitudinea logicii de ordinul al doilea. Astfel, incompletitudinea modală va fi recuperată ca un aspect important al unui fenomen mai profund, anume incompletitudinea logicii de ordinul al doilea și nu va fi relegată ca un puzzle curios și nesemnificativ. Pentru a ajunge acolo, avem nevoie de o imagine clară a acelor constrângeri a căror satisfacere încununează cu succes aplicarea schemelor recursive de traducere. De aceea, trebuie să ne întrebăm mai întâi ce anume se reduce și la ce anume se face reducerea, adică ce genuri de entități sunt corelate cu ce alte genuri în această relație de *reducere*.

Deoarece logica de ordinul al doilea joacă un rol crucial nu numai în relația de reducere examinată în detaliu în această carte, ci și în multe alte întreprinderi filosofice, nemulțumirilor și avertismentelor lui Quine în legătură cu logica de ordinul al doilea, și în mod special concepției sale că logica de ordinul al doilea este 'Teoria Mulțimilor în Blană de Oaie', trebuie să li se dea atenția cea mai mare. Cu această motivație în minte, voi face o evaluare a concepției lui Quine potrivit căreia logica de ordinul al doilea este teorie a mulțimilor. În țesătura argumentării mele filosofice voi introduce apoi strategia prin care Boolos apără această logică. Ideea fundamentală pe care o dezvoltă Boolos este că există o continuitate lină, mai degrabă decât o distincție netă între logica de ordinul întâi și logica de ordinul al doilea, lucru care se poate observa, de pildă, prin indicarea unor importante concepte metalogice precum acela de *interpretare*, *validitate*, *corectitudine semantică* și *decidabilitate*, care apar cu aceeași semnificație sau cu mici diferențe atât în logica de ordinul întâi, cât și în logica de ordinul al doilea. Acum, dacă dreptatea este de partea lui Quine, care ar fi relevanța criticii sale la adresa perspectivelor reducerii modalităților la structuri de

ordinul al doilea? Dar dacă, pe de altă parte, concepția lui Boolos este bine-fundamentată, atunci cum ar influența aceasta înțelegerea noastră generală a principalului argument al cărții?

Împotriva poziției lui Quine, voi căuta să arăt că se poate obține o "achitare" a logicii de ordinul al doilea, dacă se acordă atenția cuvenită distincției nete dintre noțiunea logică de mulțime, care are o structură booleană, și noțiunea iterativă de mulțime, care nu are o astfel de structură. Astfel, în măsura în care noțiunea logică de mulțime este o noțiune logică legitimă, s-ar putea ca așteptările noastre de a da o întemeiere bună logicii de ordinul al doilea ca logică autentică să fie rezonabile. Principala obiecție a lui Quine împotriva interpretării logicii de ordinul al doilea vizează de fapt numai noțiunea iterativă de mulțime, care nu este o parte proprie a logicii. Căci în această concepție despre mulțimi, teoria mulțimilor are o 'ontologie excesivă' și cade sub tirul obiecțiilor lui Quine împotriva presupozițiilor ontologice substanțiale în logică. Pe de altă parte, sprijinul nostru pentru logica de ordinul al doilea se întărește dacă, după cum cred, reușim să facem plauzibilă concepția că noțiunea logică de mulțime, sau conceptul fregean de mulțime (după cum l-am putea numi), face ca mulțimile să se comporte precum indexicalii sau demonstrativii. În mod corespunzător, deoarece concepția fregeană despre mulțimi face ca interpretarea conceptului de mulțime ca un concept logic să fie rezonabilă, această interpretare va goli noțiunea de mulțime de orice implicații ontologice excesive.

O altă posibilă linie de dezvoltare a laturii filosofice a acestei cărți, dar pe care totuși o voi lăsa deoparte aici, ar fi aceea de a face o listă a problemelor metafizice importante, și apoi de a examina pe unele dintre aceste probleme care gravitează în jurul conceptelor modale, probleme asupra cărora, totodată, ar putea să arunce lumină relația dintre logica modală și logica de ordinul al doilea. O problemă cu un profil

Biblioteca Centrală Universitară

proeminent este următoarea: care ar fi impactul pe care l-ar putea avea această reducere – urmărită atât pentru scopuri tehnice cât şi pentru scopuri conceptuale – a modalităţilor la structuri de ordinul al doilea asupra unei concepţii modalist-actualiste despre statutul logic (semantic) şi filosofic (metafizic) al conceptelor modale. Asupra mănunchiului de concepte şi de teme care alcătuiesc concepţia modalist-actualistă, adică, succint spus, concepţia că modalităţile sunt primitive în raport cu cuantificarea asupra lumilor posibile şi că orice există este actual, sper să mă pot pronunţa pe larg într-o lucrare viitoare.

Capitolul 1. Uneltele şi fundalul

Scopul meu în această carte este să examinez fenomenul incompletitudinii modale şi să-l explic prin intermediul incompletitudinii logicii de ordinul al doilea. De aceea, voi începe prin a schiţa principalele elemente ale fundalului pe care poate fi dusă până la capăt o înţelegere adecvată a acestei teme. [1]

Merită să observăm, mai întâi, că o înţelegere profundă a chestiunilor modale şi a grupului de sisteme modale, care fuseseră dezvoltate anterior în mod axiomatic, aproape fără nici o idee despre ce *înseamnă* ele, nu a putut fi obţinută până ce nu a fost formulată o semantică satisfăcătoare pentru limbajele modale la sfârşitul anilor 1950 şi începutul anilor 1960, în lucrări datorate în principal lui S. Kripke, S. Kanger, sau J. Hintikka. În mare, ideea acestei abordări semantice (model-teoretice) a limbajelor modale, cunoscută drept "semantica lumilor posibile", este o foarte ingenioasă generalizare a noţiunii de interpretare pentru limbajul logicii (non-modale) de ordinul întâi. Această generalizare poate fi dusă cu succes până la capăt, pentru că strategia pe care o încorporează este aptă să ocolească unele probleme produse de către principalul contrast dintre conectorii propoziţionali veri-funcţionali şi conectorii propoziţionali modali: în timp ce primii au o semantică veri-funcţională care conduce destul de uşor şi de direct la o definiţie formală a adevărului şi a validităţii pentru

---

[1] Pentru prezentarea fundalului şi a elementelor pregătitoare în acest capitol cf. următoarele surse bibliografice principale: Bowen, Kenneth A. *Model Theory for Modal Logic. Kripke Models for Modal Predicate Calculi*, D. Reidel Publishing Company, 1979; Chellas, Brian *Modal Logic. An Introduction*, Cambridge University Press, 1980; Fine, Kit 'Model Theory for Modal Logic. Part I - *DE RE / DE DICTO* Distinction', *Journal of Philosophical Logic* 7 (1978), pg. 125-126; Fine, Kit 'Model Theory for Modal Logic. Part II - The Elimination of *DE RE* Modality', *Journal of Philosophical Logic* 7 (1978), pg. 277-306; Fine, Kit 'Model Theory for Modal Logic. Part III - Existence and Predication', *Journal of Philosophical Logic 10* (1981), pg. 293-307; Forbes, Graeme *An Introduction to Modal Logic*, Tulane University, 1994; Hughes, G. E. şi M. J. Cresswell *An Introduction to Modal Logic*, Routledge, London - New York, 1968; Hughes, G. E. şi M. J. Cresswell *A Companion to Modal Logic*, Methuen, London - New York, 1984; Hughes, G. E. şi M. J. Cresswell *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London - New York, 1996.

formule din acel limbaj, cei din urmă nu au o astfel de semantică. Prin urmare, conectorii modali nu pot fi definiți drept functori de adevăr, deoarece nu există nici o funcție de adevăr pe care ei să o exprime. Totuşi, dacă putem "împacheta" laolaltă, ca să zicem aşa, într-o structură, mai multe interpretări de genul aceleia cerute pentru a face semantica logicii non-modale de ordinul întâi, şi dacă structura este dotată cu relații între acele interpretări, atunci putem avea o soluție pentru problema găsirii condițiilor de adevăr ale operatorilor modali, de-a lungul aceloraşi linii de construcție ca şi acelea ale soluției semantice mai docile pentru conectorii veri-funcționali.

Să notăm pe scurt, acum, că o interpretare $\mathcal{I}$ pentru o secvență în limbajul logicii (non-modale) de ordinul întâi este o pereche $\mathcal{I} = (D,V)$, constând dintr-un domeniu $D = \{o_1, \ldots, o_n, \ldots\}$ de indivizi şi o atribuire V de valori semantice corespunzătoare pentru variabile, predicate şi constante individuale. Astfel, $\mathcal{I}$ trebuie să oglindească clauzele sintactice ale definiției recursive ale unei formule bine formate (fbf) şi urmează să producă o valoare semantică pentru o fbf φ în funcție de valoarea semantică (respectiv valorile semantice) pe care V le atribuie subformulelor bine formate ale lui φ. Condițiile pe care le satisface V sunt: (i) pentru fiecare constantă individuală a acelui limbaj, şi nu pentru alte simboluri, V va atribui o *referință* care este un individ luat din D; (ii) pentru fiecare literă-predicat n-adică $\lambda t_1 \ldots t_n$, şi nu altele, o *funcție caracteristică* Λ, astfel încât $\Lambda(V(t_1) \ldots V(t_n)) = \top$ dacă şi numai dacă (ddacă) $\langle V(t_1), \ldots, V(t_n)\rangle \in V_{\mathcal{I}}(\lambda)$, ceea ce revine la o atribuire de n-tupluri de obiecte din D pentru λ, şi anume acelea despre care λ este adevărat în $\mathcal{I}$; (iii) pentru fiecare simbol funcțional f de n locuri din acel limbaj, şi nu pentru alte simboluri, o *funcție* f, care este mulțimea tuturor acelor n + 1-tupluri $\langle\langle o_1, \ldots, o_n\rangle, o_{n+1}\rangle$ în D astfel încât o_{n+1} este valoarea unică în D a funcției f atunci când n-tuplul

$<o_1, \ldots, o_n>$ este argumentul lui f; (iv) pentru fiecare literă-propoziție π în limbaj, şi nu altele, o *valoare-de-adevăr*, adevărul ($\top$) sau falsul ($\bot$), dar nu amândouă; (v) V explicitează clauzele semantice obişnuite pentru vocabularul logic al limbajului, viz. definițiile din tabelele de valori de adevăr pentru conectorii propoziționali şi dă o explicitare semantică pentru cuantificatori.

Ideea fundamentală a generalizării acestui tip de interpretare pentru limbajul logicii de ordinul întâi la un limbaj modal de ordinul întâi se bizuie pe abordarea semantică a operatorilor modali în calitate de cuantificatori ai unui domeniu de entități specifice, numite lumi posibile. Astfel, operatorul necesității (simbolizat prin '$\Box$') se comportă precum un cuantificator universal al cărui domeniu este domeniul lumilor, iar operatorul posibilității ('$\Diamond$') este interpretat drept cuantificator existențial. Pe scurt, a da o interpretare pentru o secvență în limbajul logicii modale a predicatelor înseamnă să stipulăm o mulțime de lumi, structurată printr-o relație diadică, fiecare lume fiind un model de genul lui $\mathcal{I}$ de mai sus. Astfel, într-un anumit sens, atunci când construim o semantică modală, avem nevoie de "mai multe entități" (lumi) de genul acelora de care avem nevoie atunci când construim semantica logicii nemodale de ordinul intâi, deoarece fiecare lume îndeplineşte sarcina unei interpretări $\mathcal{I}$ care este cerută în cazul nemodal. Efectul modal al lui '$\Box$' şi respectiv '$\Diamond$' este dat de evaluarea formulei care se află în domeniul operatorului modal la toate lumile, respectiv la unele lumi, care se află într-o anumită relație cu lumea la care trebuie evaluată formula modală inițială.

Deoarece fenomenul incompletitudinii modale apare în logica modală a propozițiilor, nu există nici un motiv special pentru a intra în detaliile teoriei

modelelor pentru limbajul logicii modale a predicatelor. Prin urmare, din interpretarea $\mathcal{I}$ specificată mai sus trebuie să reținem numai acea clauză care reglementează atribuirile de valori de adevăr literelor-propoziție și clauzele de evaluare obișnuite pentru conectorii propoziționali în interpretări. Pentru a construi un model pentru secvențe modale în limbajul logicii modale a propozițiilor (LLMP) vom avea nevoie de o mulțime (structurată de către o relație) de mai multe interpretări de genul celor cerute în cazul nemodal.

Astfel, limitându-ne doar la cazul modal propozițional, o interpretare sau un ***model*** $\mathcal{M}$ al unei secvențe în LLMP va fi un triplet $\mathcal{M} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$, unde $W_{\mathcal{M}}$ este o mulțime de lumi; $R_{\mathcal{M}}$ este o relație binară pe mulțimea $W_{\mathcal{M}}$ astfel încât pentru fiecare w_i și w_j, $i, j \in \mathbb{N}$, $\langle w_i, w_j \rangle \in R_{\mathcal{M}}$ ddacă w_i stă în relația $R_{\mathcal{M}}$ cu w_j, iar $R_{\mathcal{M}}$ satisface anumite condiții care vor fi prezentate mai târziu; și $V_{\mathcal{M}}$: $\Pi \rightarrow \wp(W)$ este o funcție care este definită pentru fiecare literă-propoziție $\pi \in \Pi$ din limbaj și ia valori în mulțimea tuturor submulțimilor lui $W_{\mathcal{M}}$, atribuind pe această cale fiecărei litere-propoziție π o submulțime de lumi din $W_{\mathcal{M}}$ (intuitiv, acele lumi la care π este adevărată); astfel, $V(\pi) \in \wp(W_{\mathcal{M}})$.

În termenii acestui aparat putem defini acum conceptele *formulă **adevărată** la o lume w într-un model* $\mathcal{M}$, și de *formulă **validă** în* $\mathcal{M}$. Astfel, adevărul unei formule la o lume într-un model este definit inductiv prin intermediul conceptului relației de satisfacere '$\models$' (a se citi: 'satisface'), i. e. $\models \subseteq (\mathcal{M}, w) \times$ Sent (LLMP). Așadar, satisfacerea ține între formule și modele și este cea mai mică relație care întrunește condițiile:

pentru fiecare literă-propoziție π în LLMP, $(\mathcal{M}, w) \models \pi$ ddacă $w \in V_{\mathcal{M}}(\pi)$;

pentru fiecare fbf-uri Φ şi Ψ în LLMP,

$(\mathcal{M}, w) \models \sim\Phi$ ddacă $(\mathcal{M}, w) \not\models \Phi$;

$(\mathcal{M}, w) \models \Phi \,\&\, \Psi$ ddacă $(\mathcal{M}, w) \models \Phi$ şi $(\mathcal{M}, w) \models \Psi$;

$(\mathcal{M}, w) \models \Phi \vee \Psi$ ddacă $(\mathcal{M}, w) \models \Phi$ sau $(\mathcal{M}, w) \models \Psi$; şi

$(\mathcal{M}, w) \models \Phi \rightarrow \Psi$ ddacă $(\mathcal{M}, w) \not\models \Phi$ sau $(\mathcal{M}, w) \models \Psi$;

pentru fiecare fbf Φ în LLMP,

$(\mathcal{M}, w) \models \Box\Phi$ ddacă $(\forall u \in W_{\mathcal{M}})$(dacă $R_{\mathcal{M}}wu$ atunci $(\mathcal{M}, u) \models \Phi$);

pentru fiecare fbf Φ în LLMP,

$(\mathcal{M}, w) \models \Diamond\Phi$ ddacă $(\exists u \in W_{\mathcal{M}})(R_{\mathcal{M}}wu$ şi $(\mathcal{M}, u) \models \Phi)$.

Conceptul definit mai sus ne permite să introducem acum conceptul unei formule Φ *valide* într-un model $\mathcal{M} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$ ca fiind acea formulă Φ care este *adevărată la fiecare lume* w în $W_{\mathcal{M}}$; astfel, $\models_{\mathcal{M}} \Phi$ ddacă $\forall w \in W_{\mathcal{M}}$ $(\mathcal{M}, w) \models \Phi$.

Totuşi, principalul concept de validitate care va prezenta interes pentru noi în această monografie nu este acela al unei formule valide într-un model. De fapt, conceptul de validitate poate fi rafinat mai departe şi aceasta se va dovedi că are consecinţe importante pentru chestiunea pe care o examinăm aici, viz. sisteme modale complete vs. sisteme modale incomplete. O noţiune de formulă validă care cu siguranţă că este foarte atrăgătoare în general - şi la un nivel intuitiv - este aceea de formulă adevărată, indiferent de valorile de adevăr atribuite literelor-propoziţie (variabilelor, în alte versiuni) ale acelei formule de către interpretările tuturor literelor-propoziţie din formulă. Recunoaştem aici noţiunea comună de validitate ca adevăr în toate interpretările posibile ale literelor-propoziţie care figurează în structura unei formule. Omologul modal al conceptului nemodal de interpretare pentru literele-propoziţie

este tripletul $\mathcal{M} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$. Aşadar, a spune că o formulă modală Φ este validă potrivit acestei noţiuni de validitate înseamnă a spune că Φ este adevărată indiferent de valorile atribuite fiecărei litere-propoziţie π în Φ de către componenta $V_{\mathcal{M}}$ a lui $\mathcal{M} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$. Atunci când interesul nostru se focalizează asupra *acestei* noţiuni de validitate, putem ignora funcţia de valorizare $V_{\mathcal{M}}$ şi în felul acesta rămânem doar cu componenta $(W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}})$ a tripletului $\mathcal{M} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$. Prin urmare, graţie acestei noţiuni comune de validitate pentru o formulă modală în LLMP suntem conduşi la un concept metalogic foarte important pentru sistemele modale şi anume conceptul de *cadru* (*frame*).

Un *cadru* $\mathcal{F}$ este o pereche care constă dintr-o mulţime de lumi şi o relaţie binară pe acea mulţime, i. e. $\mathcal{F} = (W_{\mathcal{F}}, R_{\mathcal{F}})$. Dacă $\mathcal{M} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}}) = (\mathcal{F}_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$, spunem că $\mathcal{M}$ este *bazat pe* cadrul $\mathcal{F}$ şi că $\mathcal{F}$ este cadrul lui $\mathcal{M}$.

Bazându-ne pe acest concept nou, putem extinde acum definiţia unei formule modale valide astfel: Φ se va spune că este validă într-un cadru $\mathcal{F} = (W_{\mathcal{F}}, R_{\mathcal{F}})$ ddacă pentru fiecare model $\mathcal{M}$ bazat pe $\mathcal{F}$ şi pentru fiecare w în fiecare astfel de model, $(\mathcal{M}, w) \models \Phi$.

Este bine să ne oprim aici şi să remarcăm că există o deosebire importantă între cele două concepte introduse până acum, viz. conceptul de formulă validă într-un model şi conceptul de formulă validă într-un cadru. De fapt, numai conceptul din urmă captează ideea intuitivă care se află în spatele validităţii ca adevăr, indiferent de valorile de adevăr atribuite părţilor atomare ale unei formule. Căci, aşa cum se poate vedea cu uşurinţă, potrivit primei noţiuni, chiar şi o literă-propoziţie poate fi formulă validă, dacă modelul în care este evaluată validitatea sa se întâmplă să conţină numai

lumi la care acea literă-propoziție este adevărată. Morala aici este că dacă vrem ca validitatea să însemne adevăr pentru fiecare interpretare a literelor-propoziție ale unei formule, atunci noțiunea de validitate într-un model, sau chiar într-o clasă de modele care au o anumită caracteristică, nu ne va fi de nici un folos. Pentru că acea noțiune nu va capta ideea intuitivă în toate modelele.

Aceeași idee a paragrafului anterior poate fi reformulată și sub forma observației importante că validitatea într-un model nu este conservată de către toate regulile unui sistem modal normal S. Pentru a înțelege de ce stau lucrurile așa trebuie să facem clară noțiunea de sistem modal normal. Astfel, ceea ce înțelegem printr-un sistem modal normal este exact o colecție de formule ale unui limbaj al logicii modale. Fiecare membru al unei astfel de colecții (sistem) S este o teoremă a lui S. Un sistem modal S este denumit *normal*, dacă S poate fi specificat în felul următor: (i) S conține ca teoreme toate formulele valide ale limbajului logicii (nemodale a) propozițiilor; (ii) S conține formula modală **K** (denumire care a fost aleasă în onoarea lui Kripke) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$, care este unica secvență-axiomă a celui mai slab sistem modal propozițional normal K; (iii) S are următoarele trei reguli de transformare, care produc teoreme noi ale lui S din teze anterior existente în S:

Substituția Uniformă (SU): dacă σ este o teoremă a lui S, tot așa este fiecare instanță-substituție a lui σ;

Eliminarea Condiționalului, i. e. $\rightarrow$E (sau modus ponens): dacă $\vdash_S \sigma \rightarrow \tau$ și $\vdash_S \sigma$, atunci $\vdash_S \tau$, și

Necesitarea (N): dacă $\vdash_S \sigma$, atunci $\vdash_S \Box\sigma$.

Sisteme modale propoziționale normale bine-cunoscute, care sunt extinderi ale sistemului K, sunt sistemele T, S4, B, S5. Sistemul T este **K** + axioma (**T**) $\Box A \rightarrow A$,

S4 este T + (**4**) $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ (sau, altfel spus, **KT4**), B este T + (**B**) $A \rightarrow \Box\Diamond A$ (sau altfel **KTB**) şi S5 este T + (**E**) $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ (sau altfel **KTE**).

Să revenim acum la remarca potrivit căreia validitatea într-un model nu este conservată de către toate regulile unui sistem modal normal S. Pentru a justifica această afirmație este suficient să se observe că dintre regulile de transformare ale oricărui sistem modal normal S, numai $\rightarrow$E şi N au capacitatea de a conserva validitatea într-un model. În timp ce SU nu are această capacitate. Pentru a vedea aceasta să notăm că dacă ceea ce se înțelege prin validitate este 'adevăr în fiecare lume w a unui (unic) model $\mathcal{M}$', atunci, potrivit *acestei* definiții a validității, instanța-substituție (**T'**), viz.

(**T'**) $\Box B \vdash_T B$

a axiomei-T

(**T**) $\Box A \vdash_T A$,

poate fi nevalidă, chiar dacă **T** însăşi este validă în $\mathcal{M}$. Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model definit de către condițiile $W = \{w_1, w_2\}$, $R = \{<w_1, w_2>\}$ şi $(\mathcal{M}, w_1) \vDash A$, $(\mathcal{M}, w_1) \nvDash B$, $(\mathcal{M}, w_2) \vDash A$, $(\mathcal{M}, w_2) \vDash B$. Nu este greu să se vadă că **T** este adevărată în w_1 şi w_2, şi că este prin urmare validă în $\mathcal{M}$, deoarece nici nu este cazul că $(\mathcal{M}, w_1) \vDash \Box A$ şi $(\mathcal{M}, w_1) \nvDash A$, şi nici nu este cazul că $(\mathcal{M}, w_2) \vDash \Box A$ şi $(\mathcal{M}, w_2) \nvDash A$. Totuşi, **T'** este nevalidă în $\mathcal{M}$ deoarece $(\mathcal{M}, w_1) \vDash \Box B$, întrucât w_1 vede doar pe w_2 şi $(\mathcal{M}, w_2) \vDash B$, dar cu toate acestea $(\mathcal{M}, w_1) \nvDash B$.

Este foarte firesc să se considere atunci că nu putem folosi în nici un fel această noțiune de formulă validă într-un model. Totuşi, lucrurile nu stau aşa. Pentru că acest concept se dovedeşte a fi foarte util în investigația metalogică a *completitudinii* sistemelor modale cu privire la clasa cadrelor care caracterizează sistemele. Dar pentru a-i dovedi utilitatea, conceptul de formulă validă într-un model trebuie asociat cu un tip foarte special de model, care este denumit *model canonic*. Ne vom întoarce la această chestiune deîndată.

Înainte de a examina mai departe această chestiune preliminară, aş vrea să adaug încă un cuvânt privitor la motivația subiacentă prezentării 'uneltelor şi a fundalului' în felul în care am făcut-o aici. Rațiunea urmăririi acestei linii de argumentare nu este numai aceea că astfel se poate arăta că principalele concepte metalogice necesare pentru a face metateoria logicii modale 'cresc' din conceptele folosite în logica nemodală de ordinul întâi, deşi acest fel de a aborda lucrurile ne va permite accesul la înțelesul acestor concepte modale şi la aparatul semanticii modale într-un fel mai propriu şi mai lesnicios. Rațiunea în cauză este totodată aceea că abordarea acestei chestiuni pe calea similarităților dintre limbajul modal şi cel al logicii predicatelor este foarte utilă şi promițătoare pentru înțelegerea limbajului modal, în interpretarea dată, ca fiind *izomorfic* cu limbajul logicii de ordinul al doilea. Punctul central al acestei remarci, a cărei forță va emerge cu putere mai târziu în această carte, este că pentru fiecare propoziție în LLMP poate fi construită o propoziție corespunzătoare în limbajul logicii de ordinul al doilea, în aşa fel incât cea dintâi este adevărată în interpretarea modală dacă şi numai dacă cea din urmă este adevărată într-o interpretare de ordinul al doilea care corespunde – într-un sens care va fi făcut precis mai târziu - interpretării modale, care face adevărată propoziția modală inițială.

Mai precis, putem formula în felul următor o versiune provizorie şi mai restrânsă a principiului conversiunii sau al corespondenței avut în vedere aici, între o interpretare $\mathcal{I}$ pentru limbajul logicii nemodale a predicatelor monadice şi o interpretare $\mathcal{I}_w$ pentru un limbaj modal propozițional: dată fiind orice interpretare $\mathcal{I} = (D, V)$ pentru o secvență cuantificațională nemodală, interpretarea corespunzătoare $\mathcal{I}_w = (W_I, R_I, V_I)$ pentru o secvență modală va consta într-o mulțime W de lumi astfel încât $D = W$, i. e. pentru fiecare $\alpha_i \in D_I$ există un unic $w_i \in W_I$, şi vice-versa, şi pentru fiecare literă-predicat monadică λ în limbajul logicii predicatelor monadice, există o literă-propoziție corespunzătoare λ_π în limbajul logicii modale a propozițiilor, astfel încât pentru fiecare astfel de $\lambda_\pi, w_i \in V(\lambda_\pi)$ ddacă $\alpha_i \in \text{Ext}_I(\lambda)$.

Din acest principiu de corespondență va fi derivată o altă corespondență, şi anume aceea dintre secvențe propoziționale modale şi secvențe în limbajul logicii de ordinul al doilea (LLOD). Totuşi, deoarece această corespondență va fi exploatată ca element pregătitor pentru explicarea incompletitudinii modale prin intermediul incompletitudinii logicii de ordinul al doilea, amân discutarea acestui aspect până în capitolul al treilea al acestei lucrări.

În partea care a mai rămas a acestui capitol, voi arăta în ce anume constă strategia generală a demonstrării caracterizării, adică a completitudinii şi corectitudinii unor sisteme modale normale bine-cunoscute şi voi lua această discuție ca pe un fundal pe care va fi foarte natural să examinăm prin contrast conceptul de sistem modal incomplet, sau necaracterizabil. Pe parcursul acestei analize vor fi discutați totodată unii termeni cheie, care sunt implicați în prezentarea demonstrației de caracterizare.

Un sistem modal normal de logică a propozițiilor S se spune că este *caracterizat* de către o clasă de cadre $\mathcal{K}$ ddacă clasa secvențelor S-demonstrabile coincide cu clasa secvențelor $\mathcal{K}$-valide.

Corectitudinea în acest context înseamnă: Un sistem modal normal S este *corect cu privire la* o clasă de cadre $\mathcal{K}$ ddacă fiecare secvență S-demonstrabilă este $\mathcal{K}$-validă. Cu alte cuvinte, ddacă: dacă $\Sigma \vdash_S \sigma$ atunci pentru fiecare cadru $\mathscr{F} \in \mathcal{K}$, $\Sigma \vDash_{\mathscr{F}} \sigma$, ceea ce mai departe înseamnă că dacă $\Sigma \vdash_S \sigma$ atunci pentru fiecare cadru $\mathscr{F} \in \mathcal{K}$ și fiecare model $\mathcal{M}$ bazat pe $\mathscr{F}$, dacă $(\mathcal{M}, w) \vDash \Sigma$ atunci $(\mathcal{M}, w) \vDash \sigma$, pentru fiecare $w \in W_{\mathcal{M}}$

Completitudinea lui S este conversa corectitudinii: Un sistem modal normal S este *complet cu privire la* o clasă de cadre $\mathcal{K}$ ddacă fiecare secvență $\mathcal{K}$-validă este S-demonstrabilă. Cu alte cuvinte, ddacă: dacă $\Sigma \vDash_{\mathscr{F}} \sigma$, pentru fiecare cadru $\mathscr{F} \in \mathcal{K}$, atunci $\Sigma \vdash_S \sigma$; ceea ce mai departe înseamnă că dacă pentru fiecare cadru $\mathscr{F} \in \mathcal{K}$ și fiecare model $\mathcal{M}$ bazat pe $\mathscr{F}$, dacă din $(\mathcal{M}, w) \vDash \Sigma$ decurge logic că $(\mathcal{M}, w) \vDash \sigma$, pentru fiecare $w \in W_{\mathcal{M}}$ atunci $\Sigma \vdash_S \sigma$.

Este important să se observe aici că noțiunile de corectitudine și completitudine definite mai sus sunt noțiuni **relative**, pentru că S este corect și/sau complet *cu privire la* o structură - și anume la o clasă de cadre. Așadar, acest sens al noțiunilor nu trebuie să fie confundat cu un sens mai degrabă **absolut** – care este sensul care prezintă principalul interes în această lucrare – al *completitudinii* (pur și simplu a) unui sistem. Si această demnitate din urmă este rezervată pentru acele sisteme și numai pentru acelea care se bucură atât de corectitudine cât și de completitudine cu privire la o anumită clasă de cadre. În *acest* sens, a fi *complet*, pentru un sistem S, înseamnă ca

sistemul S să fie *caracterizat* de către o clasă de cadre $\mathcal{K}$. Totuşi, alegerea termenului 'completitudine' aici nu este prost motivată. Căci un sistem care este corect cu privire la o clasă de cadre (şi pentru noi nu prezintă nici o importanţă sistemele incorecte) va fi caracterizat de către acea clasă, dacă este totodată complet *cu privire la* acea clasă. Iar din punct de vedere intuitiv, clasa de cadre care îl caracterizează pe S captează într-un mod adecvat toate secvenţele demonstrabile ale lui S şi numai pe acestea, făcându-l astfel pe S *complet* într-un sens absolut.

Aşadar, un sistem modal normal S este *complet* ddacă există o clasă $\mathcal{K}$ de cadre în aşa fel încât S este caracterizat de către $\mathcal{K}$.

Există mai multe tehnici de demonstrare a rezultatelor de caracterizare pentru sisteme normale. O jumătate a demonstraţiei constă în a arăta corectitudinea sistemului S şi aceasta se realizează în mod tipic printr-un argument inductiv pe lungimea formulelor bine formate ale limbajului lui S. Argumentul urmăreşte să arate că fiecare dintre secvenţele-axiome caracteristice ale lui S este validă într-o anumită clasă de cadre şi că regulile de transformare ale lui S conservă validitatea în aceeaşi clasă de cadre. Modalităţile prin care se deosebesc aceste tehnici de caracterizare, aşadar, vizează demonstraţia de completitudine a lui S *cu privire la* o clasă de cadre. Din colecţia diferitelor metode de demonstrare a completitudinii, cum ar fi de pildă tablourile semantice de tip Kripke, diagramele semantice, sau formele normale conjunctive modale pentru sistemul S5, o metodă foarte puternică şi flexibilă, a cărei arie de cuprindere este foarte largă, este metoda modelului canonic.

Strategia generală a acestei metode este să se construiască pentru fiecare sistem modal normal S modelul său canonic $\mathcal{C}_S$. Acest model are proprietatea remarcabilă de a valida toate secvenţele demonstrabile ale lui S şi numai pe acestea, şi deci are

proprietatea de a respinge la o anumită lume sau alta din W_{C_S} secvențele care nu sunt S-demonstrabile. Aceasta va fi suficient pentru a arăta că toate secvențele valide în C_S și numai acestea sunt secvențele S-demonstrabile. Prin aceasta se arată că S este atât complet cât și corect cu privire la modelul său canonic și pentru a demonstra mai departe că S este complet și corect cu privire la o clasă $\mathcal{K}$ de cadre trebuie doar să se arate că cadrul $\mathscr{F}_{C_S}$ al modelului canonic al lui S este un membru al lui $\mathcal{K}$, adică $\mathscr{F}_{C_S} \in \mathcal{K}$.

Înainte de a continua firul principal al analizei noastre, să remarcăm într-o paranteză că din existența unui model canonic corespunzător pentru fiecare sistem S decurge în mod banal că S este complet cu privire la modelul său canonic. După cum vom vedea imediat, pentru a stabili acest rezultat banal cu privire la **completitudine**, și anume completitudinea cu privire la *cel puțin un model și prin urmare la o clasă de modele*, nu este nici măcar nevoie să construim un model canonic pentru fiecare sistem, un model diferit pentru fiecare sistem distinct. Deoarece modelul canonic pentru cel mai slab sistem propozițional modal normal, adică modelul canonic al lui K, va îndeplini această sarcină.

Modelul canonic al lui S poate să îndeplinească sarcina pentru care este conceput, adică să demonstreze completitudinea lui S, în doua feluri ușor diferire: (i) sau prin a arăta că S este complet cu privire la o anumită clasă de *modele*, unul dintre modelele acestei clase fiind exact modelul canonic al lui S; sau altfel (ii) prin a arăta că S este complet cu privire la o clasă de *cadre* $\mathcal{K}$, dat fiind că se obține situația în care cadrul pe care se bazează modelul canonic al lui S este un membru al lui $\mathcal{K}$. Indiferent care ar fi alegerea care se face în această privință, o demonstrație de tip Henkin, a cărei structură generalizează demonstrația de completitudine a logicii

nemodale de ordinul întâi, este implicată în mod esențial în ceea ce realizează modelul canonic.

Tot ceea ce s-a spus până aici are înțelesul că $\mathcal{C}_S$ arată în mod direct nu completitudinea lui S, ci un rezultat echivalent, şi anume teorema-Henkin pentru S, potrivit căreia oricare mulțime S-consistentă de propoziții Σ în limbajul lui S este realizabilă, sau are un model care o verifică. Strategia demonstrării acestui rezultat cuprinde, în mare, trei părți: (i) arătăm mai întâi că între completitudinea lui S şi teorema-Henkin se stabileşte o relație de echivalență logică; (ii) arătăm apoi că pentru fiecare mulțime S-consistentă de propoziții Σ există o mulțime Γ astfel încât Γ este maximal S-consistentă şi $\Sigma \subseteq \Gamma$ (aceasta este lema lui Lindenbaum); (iii) şi în final arătăm cum se construieşte un model a cărui proprietate caracteristică este că toate propozițiile lui Γ şi numai ele sunt verificate de către acel model (aceasta echivalează cu construirea modelului canonic al lui S).

Principala idee subiacentă acestei demonstrații este că procedura în trei paşi prezentată succint mai sus va produce rezultatul corect grație următoarei rațiuni:

Dacă pornim de la o mulțime S-consistentă oarecare de propoziții, lema lui Lindenbaum ne permite să găsim o mulțime maximală S-consistentă de propoziții care include mulțimea de la care am pornit. Fiecare lume în modelul canonic al lui S este, prin definiția lui W din $\mathcal{C}_S$, o mulțime maximală S-consistentă de propoziții, acesta fiind trucul care este crucial pentru a duce la bun sfârşit toată demonstrația. Astfel, fiecare mulțime S-consistentă de propoziții este inclusă într-o lume sau alta a modelului canonic al lui S. Acum, potrivit definiției $V_{\mathcal{C}^S}$, pentru ca fiecare literă-propoziție π din limbajul lui S să fie adevărată la o lume $w \in W_{\mathcal{C}^S}$ trebuie ca π să aparțină lui w şi vice-versa. Printr-un argument inductiv pe lungimea fiecărei fbf din limbajul lui S

(Teorema Fundamentală pentru Modelul Canonic al oricărui Sistem Normal), se poate arăta despre oricare fbf că este adevărată la o lume $w \in W_{\mathcal{S}}$ ddacă acea fbf aparține lui w. Aceasta înseamnă că fiecare fbf σ este adevărată la $w \in W_{\mathcal{S}}$ ddacă $\sigma \in w$. Aşadar, pentru fiecare mulțime S-consistentă de propoziții, procesul schițat mai sus se va încheia cu un model verificator pentru acea mulțime, adică o lume $w \in W_{\mathcal{S}}$, care fiind o mulțime maximală S-consistentă va include mulțimea S-consistentă originală. În fine, deoarece teorema-Henkin pentru S este interderivabilă cu teorema completitudinii (relative a) lui S, demonstrația celei dintâi constituie totodată o demonstrație a celei din urmă.

Să urmărim acum câteva detalii ale acestei demonstrații:

Ideea centrală a lemei lui Lindenbaum este că pentru oricare sistem logic S, dacă Σ este o mulțime S-consistentă de propoziții, atunci există o mulțime Γ astfel încât (a) Γ este maximal S-consistentă şi (b) $\Sigma \subseteq \Gamma$. Mai întâi, să observăm că această lemă, şi aşa cum vom vedea imediat şi demonstrația ei, nu se bizuiesc pe nici un principiu modal, rezultatul pe care-l consemnează ea fiind identic cu acela care se obține şi în logica nemodală de ordinul întâi. Cele două concepte care apar aici, acela al S-consistenței şi al maximalității, au nevoie de o scurtă discuție colaterală. Pentru că, aşa cum relevă sursele bibliografice, există o uşoară fluctuație în definițiile şi în folosirea lor.

Poate că modul cel mai firesc de a exprima conceptul S-consistenței este acela care foloseşte simbolul negației. Astfel, putem accede cu uşurință la un evantai de cazuri în care este instanțiată proprietatea de a fi S-consistent, de exemplu o propoziție într-un sistem se poate spune că este S-consistentă, o mulțime (finită sau infinită) se poate spune că este S-consistentă şi bine înțeles sistemul S însuşi poate să se bucure de proprietatea de a fi S-consistent. Potrivit interpretării active aici, în

fiecare dintre aceste cazuri ideea negației apare în mod esențial. Pentru că o fbf σ este S-consistentă ddacă

$$\nvdash_S \sim\sigma$$

apoi o mulțime Σ – finită sau infinită, căci nu are importanță aici – de fbf-uri este S-consistentă ddacă **nu** există nici o mulțime finită $\Sigma' = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ astfel încât $\Sigma' \subseteq \Sigma$ şi

$$\vdash_S \sim(\sigma_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \sigma_n)$$

unde fiecare $\sigma_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq n$; şi în fine un sistem S este S-consistent ddacă mulțimea tuturor teoremelor sale este S-consistentă în sensul definit în acest paragraf.

Oricum, există un alt fel de a prezenta detaliile S-consistenței unei mulțimi de propoziții într-un sistem S, şi prin urmare ale S-consistenței sistemului însuşi. Această abordare este echivalentă cu prima abordare doar în acele sisteme în care funcția negației joacă rolul unei funcții inverse pentru oricare funcție-de-adevăr, în aşa fel încât pentru fiecare variabilă propozițională q, q şi $\ulcorner\sim q\urcorner$ este o pereche de formule explicit contradictorii. Totuşi, această abordare nu depinde în mod necesar de definiția semantică pe care o primeşte negația în logica bivalentă clasică. Astfel, potrivit *acestei* abordări a S-consistenței, o mulțime de propoziții Σ este S-consistentă ddacă

$$\Sigma \nvdash_S \lambda$$

unde 'λ' este o funcție constantă de 0-locuri căreia îi este atribuită valoarea-de-adevăr fals de către fiecare interpretare a secvențelor din LLP. (Aşadar, intuitiv 'λ' stă pentru ideea de absurditate.) Desigur, deoarece în cazul sistemelor modale normale funcția negației îndeplineşte sarcina unei funcții inverse, cele două abordări ale S-consistenței, unde S este un sistem modal normal, revin la unul şi acelaşi lucru.

Pe parcursul acestei lucrări, voi adopta această definiție din urmă pentru S-consistență în termenii lui '⅄'.

Definiția care stabilește înțelesul maximalității va face ca acest concept să fie relativ la sistem și să depindă totodată de conceptul S-consistenței. Ideea fundamentală a acestei definiții este că o mulțime Σ este S-maximală, dacă adăugarea la această mulțime a oricărei propoziții, care nu este deja un membru al mulțimii, ar transforma mulțimea Σ într-o mulțime inconsistentă: atunci când S este un sistem logic, o mulțime de propoziții Σ este numită S-*maximală* ddacă: dacă $\sigma \notin \Sigma$ atunci $\Sigma \cup \{\sigma\}$ este S-inconsistentă. Și prin a fi S-inconsistent, potrivit cu ceea ce s-a spus cu un paragraf mai înainte, noi înțelegem că există o mulțime finită $\Sigma' \subseteq \Sigma \cup \{\sigma\}$, astfel încât $\Sigma' \vdash_S ⅄$.

Acum, potrivit *acestei* noțiuni de maximalitate, *completitudinea-în-raport-cu-negația* (*negation-completeness*) a unei mulțimi Σ nu este același concept precum conceptul maximalității lui Σ, dar oricum decurge din maximalitatea și consistența lui Σ însuși. Pentru că fiecare mulțime maximal consistentă Σ este completă-în-raport-cu-negația. Pentru a înțelege *aceasta*, este suficient să arătăm că Σ, dacă este maximală și consistentă, se găsește în extensiunea mulțimilor care sunt complete-în-raport-cu-negația.

Pentru scopurile acestei demonstrații, fie S un sistem care, precum sistemul NK conceput de G. Gentzen, are o regulă a introducerii condiționalului. Trebuie să demonstrăm mai întâi că fiecare mulțime maximală S-consistentă de propoziții Σ este închisă față de consecința deductivă demonstrativă. Cu alte cuvinte, ceea ce vrem să

arătăm aici în primul rând este că dacă Σ este o mulțime maximală și S-consistentă de propoziții și $\Sigma \vdash_S \sigma$, atunci $\sigma \in \Sigma$. Să presupunem, urmărind obținerea absurdității, că Σ este o mulțime maximală și S-consistentă de propoziții și că $\Sigma \vdash_S \sigma$, dar, cu toate acestea, $\sigma \notin \Sigma$. Atunci, dacă $\sigma \notin \Sigma$, din maximalitatea lui Σ decurge că $\Sigma \cup \{\sigma\}$ este S-inconsistentă. Dar atunci $\Sigma \vdash_S \sim\sigma$,[2] luată împreună cu asumpția că $\Sigma \vdash_S \sigma$, contrazice S-consistența lui Σ. Contradicția pe care am obținut-o aici conduce la respingerea asumpției că $\sigma \notin \Sigma$, în ipoteza că Σ este o mulțime maximală și S-consistentă de propoziții și că $\Sigma \vdash_S \sigma$. Aceasta este suficient pentru a stabili că fiecare mulțime maximală și S-consistentă de propoziții Σ este închisă față de consecința deductivă demonstrativă.

Acum, pentru a arăta că fiecare mulțime maximală S-consistentă de propoziții Σ este completă-în-raport-cu-negația, începem prin a observa că dacă $\sigma \notin \Sigma$ atunci $\Sigma \cup \{\sigma\} \vdash_S \lambda$ (ceea ce decurge din nou din maximalitatea Σ). Așadar, prin regula introducerii condiționalului, $\Sigma \vdash_S \sigma \rightarrow \lambda$. Apoi, din această secvență și din teorema $\vdash_S \sim\lambda$, asumând că S are *modus tollens* ca pe o regulă primitivă sau derivată, putem deriva $\Sigma \vdash_S \sim\sigma$, de unde, ca urmare a faptului că fiecare mulțime maximală S-consistentă de propoziții Σ este închisă față de consecința deductivă demonstrativă, decurge că $\sim\sigma \in \Sigma$. Aceasta încheie demonstrația că fiecare mulțime maximală S-consistentă de propoziții Σ este completă-în-raport-cu-negația.

O remarcă colaterală este util de făcut aici pentru a elimina o altă posibilitate nedorită de a confunda conceptele printr-o folosire neglijentă a terminologiei. Astfel,

---

[2] Pentru a nu duce la creşterea aglomerării de simboluri, adopt convenția ad-hoc uzuală că fiecare simbol este propriul său nume; în particular, simbolurile limbajului-obiect sunt propriile lor nume, care aparțin metalimbajului corespunzător.

trebuie să distingem cu grijă între *completitudinea logică a unui sistem* cu privire la o clasă de cadre, sau într-un sens absolut arătat mai înainte, şi *completitudinea unei teorii*. De fapt, printr-o teorie T într-un limbaj $\mathscr{L}$ se înţelege de obicei o mulţime de $\mathscr{L}$enunţuri închise faţă de o relaţie de consecinţă deductivă corectă şi completă (în sensul definit mai înainte), precum simbolul nostru $\vdash_S$ de aici; altfel spus, dacă $\Sigma \subseteq \mathsf{T}$ şi $\Sigma \vdash_S \sigma$, atunci $\sigma \in \mathsf{T}$. T se spune că este *completă* ddacă pentru fiecare $\mathscr{L}$propoziţie σ, sau $\sigma \in \mathsf{T}$ sau $\sim\sigma \in \mathsf{T}$. Aşadar, prin completitudinea unei teorii se înţelege din nou completitudinea-faţă-de-negaţie.

Iată acum detaliile tehnice ale demonstraţiei tip-Henkin:

Prin contrapoziţie, din

Completitudine Dacă $\Sigma \vDash_{\mathscr{L}} \sigma$ atunci $\Sigma \vdash_S \sigma$

obţinem

dacă $\Sigma \nvdash_S \sigma$ atunci $\Sigma \nvDash_{\mathscr{L}} \sigma$

şi din aceasta, prin paşi logici evidenţi, derivăm

dacă $\Sigma \cup \{\sim\sigma\} \nvdash_S \lambda$ atunci $\Sigma \cup \{\sim\sigma\} \nvDash_{\mathscr{L}} \varnothing$.

Deoarece 'Σ' şi '$\sim\sigma$' pot fi oricare propoziţii din limbajul lui S, din condiţionalul de mai sus, ceea ce se obţine este

Teorema-Henkin Pentru fiecare mulţime de propoziţii Δ din LLMP, dacă $\Delta \nvdash_S \lambda$ atunci $\Delta \nvDash_{\mathscr{L}} \varnothing$,

care se va citi 'Pentru fiecare mulţime de propoziţii Δ din LLMP, dacă Δ este S-consistentă, atunci Δ are un model verificator, i. e. există o interpretare care este o interpretare a fiecărei propoziţii din Δ astfel încât fiecare propoziţie din Δ este adevărată în acea interpretare'.

Lema lui Lindenbaum stabileşte că pentru fiecare astfel de Δ S-consistentă, există o mulţime Γ astfel încât (i) $\Delta \subseteq \Gamma$, şi (ii) Γ este maximală şi S-consistentă. Arătăm *aceasta* construind un lanţ crescător (care nu este cu necesitate strict crescător) de mulţimi a căror reuniune este mulţimea maximală S-consistentă dorită de propoziţii Γ. În primul rând, generăm printr-o procedură algoritmică o mulţime enumerabilă Σ a tuturor propoziţiilor din LLMP şi stipulăm că $\sigma_i \in \Sigma$ este o propoziţie oarecare din Σ.

Apoi, definim recursiv o secvenţă $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ de mulţimi astfel: (i) Γ_0 este Δ, şi (ii) pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ facem ca Γ_{n+1} să fie Γ_n, dacă $\Gamma_n \cup \{\sigma_{n+1}\}$ nu este S-consistentă (sau altfel, Γ_{n+1} este $\Gamma_n \cup \{\sim\sigma_{n+1}\}$, dacă $\Gamma_n \cup \{\sigma_{n+1}\}$ nu este S-consistentă), şi facem ca Γ_{n+1} să fie $\Gamma_n \cup \{\sigma_{n+1}\}$, dacă $\Gamma_n \cup \{\sigma_{n+1}\}$ este S-consistentă.

Mai departe, prin definiţia mulţimii Γ din lema lui Lindenbaum, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, dacă Γ_n este S-consistentă atunci următoarea mulţime din lanţ, viz. Γ_{n+1}, este S-consistentă.

Să ne reamintim acum că în construcţia secvenţei de mulţimi $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ prima mulţime din secvenţă, şi anume Γ_0, este mulţimea consistentă de propoziţii Δ care apare în antecedentul teoremei-Henkin. Astfel, potrivit rezultatului consemnat în alineatul anterior, fiecare mulţime din secvenţa construită va fi S-consistentă.

Ultimul element în lema lui Lindenbaum este construcţia mulţimii de propoziţii cerute, maximal S-consistente. Stipulăm că mulţimea Γ este mulţimea reuniune a tuturor mulţimilor Γ_n din secvenţă. Astfel,

$\Gamma = \cup \Gamma_n$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$.

Pentru următoarele temeiuri, această mulțime Γ este mulțimea maximală S-consistentă dorită:

1. Γ este S-consistentă, pentru că dacă nu ar fi, atunci ar trebui să existe o mulțime finită Γ' astfel încât $\Gamma' \subseteq \Gamma$, şi $\Gamma' \vdash_S \lambda$. Dar atunci, deoarece Γ' este finită şi este o submulțime a lui Γ trebuie să existe o mulțime Γ_n astfel încât $\Gamma' \subseteq \Gamma_n$, şi aşadar $\Gamma_n \vdash_S \lambda$, ceea ce va face ca mulțimea Γ_n să fie S-inconsistentă, contrar definiției lui $\{\Gamma_i\}_{i \in N}$. Deci nici o submulțime finită a lui Γ nu este S-inconsistentă şi aşadar, nici Γ însăşi nu este inconsistentă.

2. Γ este maximală. Pentru a vedea *aceasta* să considerăm fiecare fbf σ_n din lista enumerabilă a fbf-urilor LLMP. Prin construirea secvenței mulțimilor Γ_0, Γ_1, Γ_2, ..., a căror mulțime reuniune este Γ, la fiecare pas succesiv al construcției, de exemplu la cel de-al $i + 1$-lea pas care produce mulțimea Γ_{i+1}, Γ_{i+1} este sau Γ_i, dacă prin adăugarea lui σ_{i+1} la Γ_i această mulțime devine S-inconsistentă şi prin urmare Γ_{i+1} este maximală, sau altfel este $\Gamma_i \cup \{\sigma_{i+1}\}$. În cazul din urmă, mulțimea Γ fiind mulțimea reuniune a tuturor Γ_n, după ce ultimul stagiu al construirii lui Γ este completat, prin introducerea unei noi propoziții în Γ, fie Γ devine S-inconsistentă, ceea ce dovedeşte maximalitatea ei, sau altfel va fi identică cu mulțimea reuniune generată la penultimul stagiu al procesului construirii sale, dacă prin adăugarea unei noi propoziții *acelei* mulțimi, rezultatul este o mulțime S-inconsistentă, ceea ce arată din nou caracterul maximal al lui Γ. Deci, în fiecare caz Γ este maximală.

3. $\Delta \subseteq \Gamma$, deoarece, prin stipularea construcției lanțului crescător de mulțimi, $\Delta = \Gamma_0$, şi $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Aceasta încheie demonstrația lemei lui Lindenbaum.

Ultima parte a demonstrației completitudinii lui S constă în a arăta cum să se construiască modelul canonic al lui S, în care toate secvențele semantice valide şi numai ele sunt teoremele lui S. Pentru scopul prezentării acestei părți din urmă a demonstrației completitudinii lui S, sistemul S va consta dintr-un subsistem nemodal corect şi complet pentru logica propozițiilor împreună cu principiile modale ale sistemului K. Din moment ce modelul canonic este în mod banal un *model*, va conține aceleaşi părți componente precum oricare model. Astfel, $\mathcal{C}_S = (W_c, R_c, V_c)$. După cum am spus mai înainte, deoarece mulțimea W poate fi constituită din oricare gen de obiecte, alegerea care ne va fi de folos aici pentru teorema completitudinii lui S este aceea prin care stipulăm că fiecare $w_i \in W_c$ este o mulțime maximală S-consistentă de fbf-uri ale limbajului lui S. În consecință, pentru a conserva principiul modal general după care o propoziție necesară este adevărată la o lume w_i ddacă propoziția care este domeniul operatorului necesității este adevărată la toate lumile w_j care sunt accesibile din w_i, trebuie să definim pe R_c în aşa fel încât $R_c w_i w_j$ ddacă toate propozițiile care aparțin lui w_i şi au operatorul necesității drept principalul lor conector vor apărea şi ele în w_j cu cel mai din stânga operator modal eliminat. În fine, V_c va face pe fiecare literă-propoziție π adevărată la fiecare lume dată $w_i \in W_c$ exact în cazul în care $\pi \in w_i$.

Mai formal, pentru fiecare sistem modal normal S există un model canonic al lui S, şi anume $\mathcal{C}_S = (W_c, R_c, V_c)$ care este complet determinat de către următoarele stipulări: (i) pentru fiecare $w_i, w_i \in W_c$ numai dacă w_i este o mulțime maximală S-consistentă de fbf-uri; (ii) pentru fiecare w_i şi $w_j \in W_c$, $R_c w_i w_j$ ddacă $\Box^{-}(w_i) \subseteq w_j$,

unde prin '$\Box^{-}(w_i)$' simbolizăm toate propozițiile ale căror necesitări sunt în w_i; $(W_{\mathcal{C}}, w_i) \vDash \pi$ ddacă $\pi \in w_i$, unde π este oricare literă-propoziție din LLMP.

Ideea fundamentală a acestei definiții este să permită construirea unui argument inductiv pe lungimea oricăror fbf-uri din LLMP, care să aibă ca efect nu numai că literele-propoziție sunt adevărate la exact acele lumi cărora literele le aparțin, dar şi că oricare fbf-uri sunt adevărate la exact acele lumi care le conțin. Voi omite aici câteva dintre cazurile care nu sunt prea interesante ale acestui argument inductiv foarte simplu. Voi examina, totuşi, cazul formării-negației, al formării-conjuncției şi al formării-necesitării, care arată, dacă sunt duse cu succes până la capăt, că fiecare dintre celelalte reguli sintactice de formare vor conserva proprietatea unei formule de a fi adevărată la exact acele lumi care conțin ca membră acea formulă, dacă subformulele sale principale au această proprietate, deoarece {~, &, □} este o mulțime de conectori care este completă din punct de vedere expresiv cu privire la toți conectorii veri-funcționali şi modali.

Cazul de bază pentru argumentul inductiv este asigurat de către definiția lui $V_{\mathcal{C}}$ de mai sus, şi anume $(W_{\mathcal{C}}, w_i) \vDash \pi$ ddacă $\pi \in w_i$, unde π este oricare literă-propoziție din LLMP.

Pasul inductiv:

Cazul formării-~: $(W_{\mathcal{C}}, w_i) \vDash \sim\sigma$ ddacă $\sim\sigma \in w_i$, pentru fiecare fbf σ.

Teorema trebuie să țină pentru σ prin ipoteza inducției, adică $(W_{\mathcal{C}}, w_i) \vDash \sigma$ ddacă $\sigma \in w_i$. Pentru direcția de la stânga la dreapta, să asumăm acum $(W_{\mathcal{C}}, w_i) \vDash \sim\sigma$. Atunci $(W_{\mathcal{C}}, w_i) \nvDash \sigma$ (w_i este consistent) şi din moment ce teorema ține pentru σ

decurge că $\sigma \notin w_i$. Acum, w_i este maximală şi S-consistentă, ceea ce o face să fie şi completă în raport cu negaţia. Deci, $\sim\sigma \in w_i$. Pentru conversă, să asumăm $\sim\sigma \in w_i$. Atunci $\sigma \notin w_i$ (completitudine în raport cu negaţia şi S-consistenţă), şi $(W_c, w_i) \not\models \sigma$ (ipoteza inducţiei). Aşadar, $(W_c, w_i) \models \sim\sigma$.

Cazul formării-&: $(W_c, w_i) \models \sigma \& \tau$ ddacă $\sigma \& \tau \in w_i$, pentru fiecare fbf-uri σ, τ.

Direcţia de la stânga la dreapta: dacă $(W_c, w_i) \models \sigma \& \tau$, atunci, potrivit definiţiei inductive a adevărului la o lume într-un model, $(W_c, w_i) \models \sigma$ şi $(W_c, w_i) \models \tau$. Graţie ipotezei inducţiei, teorema ţine atât pentru σ cât şi pentru τ. Deci $\sigma \in w_i$ şi $\tau \in w_i$ de unde decurge că $\sigma \& \tau \in w_i$. Căci în caz contrar, dacă $\sigma \& \tau \notin w_i$ atunci $\sim(\sigma \& \tau) \in w_i$. Dar atunci $(W_c, w_i) \models \sim(\sigma \& \tau)$, potrivit cazului-~ cu care ne-am ocupat înainte şi drept urmare sau $(W_c, w_i) \models \sim\sigma$ sau $(W_c, w_i) \models \sim\tau$. Dacă ţine cea dintâi relaţie, atunci $\sim\sigma \in w_i$, şi prin urmare $\sigma \notin w_i$, ceea ce contrazice formula opusă care a fost deja stabilită, şi dacă ţine cea de-a doua relaţie, atunci $\sim\tau \in w_i$, şi prin urmare, contrar faţă de ceea ce s-a arătat, $\tau \notin w_i$.

Conversa ţine pe temeiul următor: dacă $\sigma \& \tau \in w_i$ atunci atât $\sigma \in w_i$ cât şi $\tau \in w_i$ pentru că altfel w_i ar fi S-inconsistentă. Deci prin ipoteza inducţiei $(W_c, w_i) \models \sigma$ şi $(W_c, w_i) \models \tau$ şi prin definiţia adevărului la o lume într-un model $(W_c, w_i) \models \sigma \& \tau$.

Cazul formării-□: $(W_c, w_i) \models \Box\sigma$ ddacă $\Box\sigma \in w_i$, pentru oricare fbf σ.

Pentru direcţia de la stânga la dreapta să asumăm, urmărind o demonstraţie prin contrapoziţie, că $\Box\sigma \notin w_i$ şi să arătăm că $(W_c, w_i) \not\models \Box\sigma$, de unde decurge că dacă

$(W_{c^s}, w_i) \vDash \Box\sigma$ atunci $\Box\sigma \in w_i$. Din asumpție decurge că $\sim\Box\sigma \in w_i$ (completitudinea față de negație a lui w_i). O lemă care este invocată aici, dar a cărei demonstrație este presupusă pentru scopurile noastre aici, stabilește că pentru oricare sistem normal S și pentru oricare mulțime de fbf-uri S-consistente Σ, care conține o fbf $\sim\Box\sigma$, mulțimea $\Box^{-}(\Sigma) \cup \{\sim\sigma\}$ este S-consistentă. Acum, din moment ce $\sim\Box\sigma \in w_i$, potrivit acestei leme, $\Box^{-}(w_i) \cup \{\sim\sigma\}$ este o mulțime S-consistentă de fbf-uri. Lema lui Lindenbaum ne asigură că există o mulțime maximală S-consistentă de fbf-uri care conține acea mulțime reuniune. Folosind modelul canonic al lui S, stipulăm acum că w_j este acea mulțime maximală S-consistentă și prin urmare $\Box^{-}(w_i) \cup \{\sim\sigma\} \subseteq w_j$. Dar aceasta din urmă este definiția lui Rw_iw_j din modelul canonic al lui S. Așadar, w_i poate vedea o lume care conține $\sim\sigma$, ceea ce înseamnă (în acord cu cazul formării-~ al Teoremei Fundamentale pentru Modelul Canonic al lui S, pe care am demonstrat-o mai sus) că w_i poate vedea o lume în care $\sim\sigma$ este adevărată și prin urmare σ este falsă. Așadar, $\Box\sigma$ nu poate fi adevărată, la urma urmei, la w_i. Prin urmare, $(W_{c^s}, w_i) \nvDash \Box\sigma$.

Pentru direcția de la dreapta la stânga acum, să presupunem că $\Box\sigma \in w_i$. Prin definiția lui R din Modelul Canonic, pentru fiecare w_j pe care w_i poate să o vadă, $\sigma \in w_j$, și întrucât teorema ține pentru σ (ipoteza inducției), σ este adevărată la fiecare lume pe care w_i poate să o vadă. Deci $(W_{c^s}, w_i) \vDash \Box\sigma$.

Un Corolar util al teoremei-Henkin, a cărui demonstrație o lăsăm ca exercițiu pentru cititor, arată că pentru fiecare sistem modal normal S, fiecare fbf σ este validă în modelul canonic al lui S ddacă $\vdash_S \sigma$.

Să rezumăm acum elementele de fundal prezentate până aici în vederea demonstrațiilor de completitudine pentru sisteme modale normale. Lucrul principal este că un gen special de model, şi anume modelul canonic al unui sistem modal normal S, este folosit într-un mod indirect pentru a demonstra completitudinea lui S cu privire la o clasă de cadre $\mathcal{K}$. Modelul canonic al lui S poate să arate că fiecare mulțime S-consistentă de fbf-uri are un model verificator (teorema-Henkin). Aceasta revine la a spune că dacă cadrul pe care se bazează modelul canonic al lui S este un membru al clasei $\mathcal{K}$ de cadre, atunci oricare formulă $\mathcal{K}$-validă este derivabilă drept una dintre teoremele lui S (completitudinea lui S cu privire la clasa $\mathcal{K}$). Pentru a demonstra teorema-Henkin pentru S, modelul canonic al lui S este folosit în felul următor: (i) se arată că mulțimea S-consistentă de fbf-uri care apare în antecedentul teoremei lui Henkin este o submulțime a unei mulțimi maximale S-consistente de fbf-uri (lema lui Lindenbaum); (ii) modelul canonic al lui S este definit ca fiind o mulțime de lumi, fiecare lume fiind o mulțime maximală S-consistentă de fbf-uri; (iii) potrivit lui (i) şi (ii), mulțimea S-consistentă de fbf-uri de la care pornim este o membră a unei lumi în modelul canonic al lui S; (iv) printr-un argument inductiv, se arată că adevărul oricărei formule la o lume în modelul canonic al lui S constă exact în apartenența acelei formule la acea lume (Teorema Fundamentală pentru Modelul Canonic); (v) potrivit lui (iii) şi (iv), mulțimea S-consistentă de fbf-uri cu care am pornit are drept model verificator acea lume din modelul canonic al lui S în care mulțimea inițială S-consistentă de fbf-uri este membră; (vi) în fine, S este complet cu privire la o clasă de cadre $\mathcal{K}$, în măsura în care cadrul modelului canonic al lui S, adică $\mathcal{F}_{CMS}$, este un cadru pentru S, şi este în $\mathcal{K}$

Procedura schițată mai sus va putea fi aplicată oricărui sistem modal canonic normal pentru a-i demonstra completitudinea față de o anumită clasă de cadre. Totuşi, dacă ținem să dăm detaliile exacte ale tehnicii construirii unui model canonic în felul făcut mai înainte, singurul sistem care urmează a fi **caracterizat**, i. e. care va fi găsit a fi atât corect cât şi complet, de către clasa *tuturor* cadrelor, va fi cel mai slab sistem modal, sistemul K, a cărui axiomă modală distinctivă este

(K) $\Box(A \rightarrow B) \vdash_K \Box A \rightarrow \Box B$.

Trebuie să fim atenți aici, totuşi, în ceea ce priveşte semnificația generală a rezultatelor pe care le obținem prin această metodă. Căci, întrucât fiecare sistem modal normal este o extindere a lui K, demonstrația că sistemul K este complet cu privire la clasa *tuturor* cadrelor este *ipso facto* o demonstrație că oricare alt sistem canonic normal este *complet* cu privire la clasa tuturor cadrelor. Temeiul pentru aceasta este pur şi simplu că pentru fiecare sistem modal canonic normal S, $K \subseteq S$, şi aşadar toate secvențele care nu sunt S-derivabile nu sunt nici K-derivabile (desigur, dacă regulile lui S nu pot produce o secvență, atunci nici o submulțime proprie a acelor reguli, printre care includem şi regulile lui K, nu vor putea produce acea secvență). Dar, în acord cu contrapusa completitudinii lui K cu privire la clasa tuturor cadrelor, dacă o secvență nu este K-derivabilă, atunci nu este validă în clasa tuturor cadrelor. Aşadar, cu alte cuvinte, va exista un cadru în acea clasă, astfel încât, într-un model bazat pe acel cadru şi la o lume în acel model toate premisele secvenței sunt adevărate, iar concluzia sa este falsă. Prin urmare, se poate arăta că secvența care nu este S-demonstrabilă nici nu este validă într-*o* clasă de cadre. Deci, teorema completitudinii lui S cu privire la o clasă de cadre este asigurată.

Formal, argumentul de mai sus este încapsulat astfel:

Dat fiind că K $\subseteq$ S, dacă $p_1, \ldots, p_n \vdash_S q$ atunci $p_1, \ldots, p_n \vdash_K q$; şi apoi, în acord cu demonstrația de completitudine a sistemului K, există un cadru $\mathcal{F}$, şi anume cadrul modelului canonic al lui K, $\mathcal{C}_K$, şi un model $\mathcal{M}$ bazat pe $\mathcal{C}_K$ astfel încât la o lume $w_i \in W_{\mathcal{M}}$ în acel model, $(\mathcal{M}_{\mathcal{C}_K}, w_i) \vDash p_1, \ldots, p_n$ şi $(\mathcal{M}_{\mathcal{C}_K}, w_i) \nvDash q$. Aşadar, oricare secvență demonstrativă care nu poate fi demonstrată în S este respinsă la o lume sau alta a lui $\mathcal{C}_K$. Prin urmare, S este complet cu privire la clasa tuturor cadrelor.

Oricât de lămuritor ar putea fi acest rezultat, el nu reprezintă principala noastră preocupare aici. Ceea ce urmărim să punem în evidență sunt rezultate de *caracterizare*, care arată adecvarea unui sistem normal la o anumită clasă de cadre şi nu doar rezultate de completitudine (relativă la o clasă sau alta de cadre). Este un fapt, într-adevăr, că oricare sistem canonic normal S este complet cu privire la clasa tuturor cadrelor, din moment ce, aşa cum am văzut, oricare secvență care nu este S-demonstrabilă este respinsă la o lume în modelul canonic al lui K, dar nu este cazul că oricare sistem S este ***caracterizat*** de către acea clasă atotcuprinzătoare de cadre. *Numai* K este caracterizat de către clasa tuturor cadrelor, deoarece nici o extindere proprie a lui K nu este *corectă* (*sound*) cu privire la clasa tuturor cadrelor şi *a fortiori* nici o astfel de extindere a lui K nu este caracterizată de către acea clasă. Pentru a lua doar un exemplu simplu, sistemul T nu poate fi caracterizat de către clasa tuturor cadrelor pentru că nu este corect cu privire la acea clasă. Lucrurile stau aşa deoarece axioma sa caracteristică, şi anume

(**T**) $\Box A \vdash_T A$

nu este validă în clasa tuturor cadrelor. Într-adevăr, **T** este respinsă de către un model $\mathcal{M}=(W, R, V)$ în care $W = \{w_1, w_2\}$, $R = \{\langle w_1, w_2\rangle\}$, $(\mathcal{M}, w_1) \nvDash A$, şi $(\mathcal{M}, w_2) \vDash A$.

Rezultatele de caracterizare pentru extinderile proprii ale lui K vor fi obținute prin aceeași strategie prezentată mai sus, dar pe calea adaptării definiției generale a modelului canonic pentru a obține clase mai restrânse de cadre cu privire la care sistemele sunt complete, *dacă sunt totodată corecte*. Îndeplinirea acestei sarcini va cere impunerea unor constrângeri structurale asupra relației de accesibilitate R_{c^s} din modelul canonic al lui S. Astfel, următoarele rezultate pot fi demonstrate folosind metoda modelului canonic: făcând pe *R* reflexiv în modelul canonic pentru T şi lăsând cadrul acestui model să fie un membru al clasei cadrelor reflexive, T va fi caracterizat de către această clasă de cadre. De asemenea, B va fi caracterizat de către clasa cadrelor reflexive şi simetrice, S4 de către clasa cadrelor reflexive şi tranzitive şi S5 de către clasa cadrelor reflexive, tranzitive şi simetrice. În mod tipic, pentru a demonstra aceste rezultate este suficient să se arate că cadrul modelului canonic al lui T (respectiv B, S4 şi S5) este un cadru *pentru* T (B, S4, S5), i. e. fiecare dintre aceste sisteme este *corect* cu privire la cadrul modelului său canonic, cu condiția ca acel cadru să fie reflexiv, respectiv reflexiv şi simetric, respectiv reflexiv şi tranzitiv şi respectiv reflexiv, simetric şi tranzitiv.

Chiar dacă pentru fiecare sistem modal normal S există modelul său canonic corespunzător, cu privire la care mulțimea teoremelor lui S este exact mulțimea formulelor valide în modelul canonic al lui S (a se vedea Corolarul Teoremei-Henkin de mai sus), din *acest fapt* decurge *doar* că fiecare sistem normal S este complet cu privire la o clasă de modele, care ar putea fi, la urma urmei, clasa singulară al cărei unic membru este modelul canonic al lui S. Şi dacă S este totodată un sistem canonic, i. e. cadrul modelului canonic al lui S este un cadru **pentru** S, atunci *oricare sistem* ***canonic*** *va fi caracterizat de către o clasă de* ***modele***. Dar din toate acestea, în măsura în care conceptul care prezintă un interes mai mare pentru noi este conceptul

mai important – şi într-un anume sens mai potrivit – de validitate într-o clasă de cadre, nu decurge că metoda prezentată în acest capitol va asigura totodată şi rezultatul că fiecare sistem canonic normal este caracterizat de către o clasă de ***cadre***. De fapt, există sisteme care nu sunt complete cu privire la nici o clasă de cadre cu privire la care ele sunt corecte. Aşadar, există sisteme necaracterizabile, adică sisteme care sunt incomplete într-un sens absolut. Prezentării şi discutării unuia dintre aceste sisteme le consacru capitolul următor.

Capitolul 2. Un sistem modal normal incomplet

Remarci asupra validității modale, cadrelor şi modelelor

Incompletitudinea unui sistem modal normal depinde, în mod crucial, de noțiunea de formulă modală validă care este adoptată. De aceea, într-un anumit sens care va fi lămurit mai departe, aspectul esențial al subiectului pe care-l examinez aici este acela că 'incompletitudine', respectiv 'completitudine', sunt noțiuni relative, iar dacă un sistem este sau nu incomplet, respectiv complet, depinde de criteriul formal de validitate care este folosit pentru evaluarea formulelor modale. Astfel, coincidența sau diferența dintre clasa teoremelor sistemului modal şi o anumită clasă de formule valide va depinde, în mod fundamental, de ce anume înseamnă că acele formule sunt valide.

Prezentarea generală, din capitolul anterior, a tehnicii modelului canonic pentru demonstrațiile de completitudine modală, ne dă aroma şi gustul acestei întreprinderi logice. În mod tipic, ceea ce se face în această construcție este următorul lucru: o clasă de cadre sau de modele este definită în mod independent şi un sistem logic modal este generat axiomatic, prin deducție naturală, sau printr-o altă procedură din teoria demonstrației; iar apoi se pune întrebarea dacă acea clasă de cadre caracterizează sau nu sistemul. Cu alte cuvinte, problema este dacă clasa teoremelor din acel sistem corespunde sau nu în mod exact clasei formulelor valide în acea clasă de cadre.

Caracterul neproblematic al aplicării tehnicii modelului canonic oricărui sistem conduce în mod firesc la întrebarea legitimă dacă nu cumva toate sistemele normale sunt complete, transformând astfel distincția dintre sisteme complete și sisteme incomplete într-o noțiune vidă. Întrucât, dacă ceea ce înțelegem printr-o formulă validă este adevărul formulei în toate lumile unui model (sau ale tuturor modelelor într-o clasă de modele), atunci oricare sistem modal normal va fi un sistem complet. Astfel, după cum știm din capitolul precedent, pentru oricare sistem dat S, există întotdeauna o anumită clasă $\mathcal{M}$ de *modele*, astfel încât pentru o fbf dată σ, $\vdash_S \sigma$ ddacă $\vDash_{\mathcal{M}} \sigma$. Temeiul acestei idei este acela că, potrivit tehnicii modelului canonic, va exista întotdeauna o clasă de modele – care s-ar putea foarte bine să fie clasa unitate care constă din modelul canonic pentru acel sistem – și care caracterizează în mod adecvat sistemul. În acest caz, se pierde distincția dintre sisteme modale complete și sisteme modale incomplete.

O chestiune care prezintă interes în contextul discuției noastre este dacă adoptarea *acestei* definiții a validității nu va obstrucționa o anumită distincție substanțială. Aici este locul în care o bună strategie este aceea de a ne pune întrebarea ce anume se întâmplă dacă schimbăm noțiunea de formulă modală validă. Căci, dacă urmărim să dăm un sens acestei distincții semantice, atunci o bună opțiune ar fi aceea de a explora diferite fațete ale definirii validității modale, cu scopul de a observa, apoi, dacă putem ataşa o distincție reală diferenței dintre sisteme modale complete și sisteme modale incomplete. Oricum, pentru a nu proceda într-o manieră circulară aici, nu vom putea introduce un alt criteriu pentru validitate modală numai pentru a putea arăta că nu fiecare formulă modală validă (potrivit acestui nou criteriu) este o teoremă a unui sistem, care, în felul acesta, se arată a fi incomplet, și, pe cale de consecință, pentru a putea declara 'completitudine vs. incompletitudine' o distincție autentică.

Un nou candidat pentru conceptul de formulă modală propoziţională validă ar putea fi obţinut, de pildă, prin definirea validităţii unei formule drept validitate în clasa fiecărui model ***pentru*** un sistem S, adică în fiecare model care validează toate teoremele lui S. Ca să detaliem puţin această sugestie, potrivit acestui nou criteriu de validitate, un sistem S va fi complet ddacă fiecare fbf care este validă în fiecare model în care fiecare teoremă a lui S este validă, este o teoremă a lui S, iar altfel va fi incomplet. Dar nici aceasta nu ne va ajuta să trasăm o linie netă de demarcaţie între sisteme complete şi sisteme incomplete. Este adevărat că această definiţie a validităţii este concepută în termenii unei clase de modele care nu este delimitată în mod independent faţă de sistem, ci în termenii unei clase de modele în care toate teoremele lui S sunt valide. Iar *a priori*, pare să fie rezonabil să credem că s-ar putea să mai existe şi alte formule, care sunt valide în clasa modelelor pentru S, în plus faţă de teoremele lui S. În consecinţă, este legitim să ne punem întrebarea dacă sistemul este sau nu suficient de puternic pentru a demonstra toate formulele care sunt valide în acest sens. Mai mult, în felul acesta, distincţia noastră pare să fie pusă la adăpost: acele sisteme care au suficiente reguli pentru a demonstra toate acele formule valide sunt complete, în timp ce acelea care nu sunt suficient de puternice nu sunt.

Totuşi, se dovedeşte că nici această nouă propunere pentru conceptul de validitate nu va trasa o distincţie substanţială între sisteme complete şi sisteme incomplete. Căci, în mod evident, modelul canonic al lui S este un model pentru S, iar o consecinţă a teoremei modelului canonic pentru oricare sistem normal S este că toate formulele valide în modelul canonic al lui S sunt exact teoremele lui S. Aşadar, nu există nici o formulă validă în clasa modelelor pentru S care să nu fie printre teoremele lui S. Aşadar, clasa formulelor valide în mulţimea modelelor pentru S este exact aceeaşi precum clasa teoremelor lui S, ceea ce înseamnă că S, potrivit acestui

nou criteriu al validității, trebuie să fie complet. Încă o dată, distincția dintre sisteme complete şi sisteme incomplete pare să fie iluzorie.

Totuşi, concepera validității modale drept validitate în clasa *cadrelor* va ataşa o semnificație reală distincției pe care o examinez aici. Căci atunci, se va dovedi că nu fiecare sistem modal este caracterizabil de către o clasă de cadre, în sensul precis că există sisteme care nu sunt complete relativ la clasa tuturor cadrelor, relativ la care acele sisteme sunt corecte. Iar dacă această nouă definiție a validității are unele temeiuri bune, care sunt totodată independente față de distincția discutată aici, atunci distincția însăşi va emerge ca o consecință importantă şi substanțială a acestei noi perspective asupra conceptului de validitate modală.

Eu cred, într-adevăr, că definiția validității în termeni de cadre, mai degrabă decât în termeni de modele, este mai potrivită şi mai firească. Căci, aşa cum am arătat succint în capitolul precedent, această definiție este mai aptă să capteze noțiunea noastră mai intuitivă şi mai laxă de valditate logică, şi anume noțiunea de formulă validă ca formulă adevărată, indiferent ce mulțimi de lumi din domeniul unei interpretări sunt atribuite componentelor sale atomare. În teoria modală, o mulțime de lumi din domeniu este numită *judecată* sau *conținut propozițional (proposition)*. Intuitiv, fiecărei componente atomare din limbaj i se atribuie, prin intermediul interpretării modale, acele lumi care fac adevărată componenta atomară respectivă. Iar judecata pe care o exprimă propoziția este mulțimea tuturor acelor lumi care fac propoziția adevărată. Este evident, atunci, că dacă eliminăm din oricare model partea care constă din atribuirea de lumi din domeniul interpretării componentelor atomare, ceea ce se obține este structura numită 'cadru'. Astfel, definiția validității în termenii cadrelor este mai apropiată de noțiunea noastră mai generală şi mai intuitivă de

validitate pe care o avem în minte, şi aceasta nu numai cu privire la validitatea formulelor modale.

Totodată, dacă rămânem la noţiunea de validitate într-un model, trebuie să fim pregătiţi să renunţăm la o altă noţiune importantă, şi anume noţiunea de conservare a validităţii cu ajutorul regulilor de transformare obişnuite ale unui sistem modal. Am arătat în capitolul precedent că validitatea în modele nu are această proprietate importantă, deoarece, deşi →E şi Nec conservă validitatea într-un model, regula substituţiei, sau introducerea secvenţei, nu conservă validitatea. Aşadar, pentru a avea toate aceste lucruri formulate într-o formă mai potrivită pentru ideea puterii logice a unui sistem, să spunem că dacă rămânem cu noţiunea de validitate în modele, atunci faptul că toţi membrii unei mulţimi Σ de formule modale sunt valizi într-un model (W, R, V) nu garantează că toate teoremele sistemului $K + \Sigma$ vor fi valide în acel model. Pentru că putem defini cu uşurinţă un model nou, în care unele instanţe-substituţie ale formulelor din Σ nu mai sunt valide, dar aceleaşi instanţe-substituţie vor fi totuşi teoreme ale lui $K + \Sigma$. Ceea ce ne trebuie aici pentru a face ca *toate* regulile unui sistem normal (inclusiv substituţia) să conserve validitatea într-un model este condiţia mai puternică, potrivit căreia formulele valide în modelul (W, R, V) să fie generalizabile, adică nu numai să fie valide într-un model, dar toate instanţele lor substituţie să fie valide în acelaşi model. Pe de altă parte, definiţia validităţii formulelor modale în termenii cadrelor nu are acest neajuns evident, de unde şi preferinţa noastră raţională pentru această definiţie din urmă.

Un avertisment este binevenit aici. Nu voi intra în detalii acum, dar până la sfârşitul capitolului se va vedea clar că pentru a da o demonstraţie de incompletitudine pentru un sistem modal, va fi nevoie să folosim un gen special de cadru, care a fost botezat *cadru general* (Van Benthem). Acest tip de cadru se deosebeşte de cadrele

folosite până aici, care, pentru a evita confuzii terminologice, sunt denumite cadre Kripke. Deosebirea constă în aceea că aceste cadre generale încorporează ca element nou o mulțime de submulțimi, fiecare dintre acestea având drept membri elemente luate din *W*. Principala mea motivație pentru a introduce aici această noțiune este aceea de a arăta că dacă ceea ce înțelegem prin validitate este validitate într-un astfel de cadru general, atunci dăm din nou peste rezultatul pe care l-am întâlnit în cazul validității în modele, şi anume fiecare sistem normal va fi din nou complet. Acum, dacă se ridică întrebarea cum se potriveşte această noțiune de validitate cu celelalte două noțiuni, atunci se pare că trebuie să reținem (cel puțin) următoarele două lucruri importante: (i) conceptul de cadru general se dovedeşte a fi crucial într-o demonstrație a *independenței semantice* a formulelor, această demonstrație din urmă fiind o parte decisivă a unei demonstrații de incompletitudine, în timp ce un cadru Kripke nu este de nici un ajutor pentru scopurile acestei părți a demonstrației; (ii) un cadru general pentru un sistem este mai apropiat de un model, dacă ceea ce ne interesează este distincția dintre sisteme modale complete şi sisteme modale incomplete, deoarece dacă noțiunea de validitate cu care lucrăm este noțiunea de formulă validă în fiecare model bazat pe un cadru general pentru S, atunci S va emerge ca un sistem complet; totuşi, un cadru general pentru un sistem apare a fi mai apropiat de un cadru Kripke, dacă interesul nostru se deplasează către noțiunea de reguli ale lui S care conservă validitatea, deoarece în această situație, un cadru general se comportă precum un cadru Kripke obişnuit, prin aceea că regula substituției va conserva validitatea oricărei teoreme a lui S, indiferent dacă aceasta este sau nu generalizabilă.

Ca să demarăm lucrurile, să ne reamintim pe scurt că potrivit explicației noastre din capitolul precedent, un sistem modal normal S este necaracterizabil, sau

incomplet într-un sens absolut, ddacă nu există nici o clasă de cadre $\mathcal{K}$ astfel încât S să fie *corect* relativ la $\mathcal{K}$ şi S să fie totodată *complet* relativ la $\mathcal{K}$. Astfel, pentru a arăta că S este incomplet, ceea ce ne trebuie este o demonstraţie care să arate că există cel puţin o secvenţă în limbajul lui S, care este **validă** în clasa cadrelor pentru S, adică în fiecare cadru în care toate teoremele lui S sunt valide, dar care secvenţă nu este derivabilă ca o teoremă a sistemului S (ca o S-teoremă). Pentru a formula ideea în manieră ceva mai formală, pentru ca S să fie incomplet trebuie să existe o secvenţă $\Sigma \vDash \sigma$, unde Σ poate fi vidă, în aşa fel încât $\Sigma \vDash_{\mathcal{K}} \sigma$, unde $\mathcal{K}$ este clasa cadrelor **pentru** S, dar $\Sigma \nvdash_S \sigma$.

Dacă ne gândim acum cu atenţie la aparatul tehnic al demonstraţiei incompletitudinii modale, atunci merită să remarcăm unii parametri generali ai ei. Aşa cum am văzut în alineatul anterior, pentru ca un sistem S să fie incomplet faţă de o clasă de cadre (interpretări semantice), faţă de care, totuşi, S este corect, trebuie ca o anumită formulă (să o numim 'formulă designată') să existe, să fie validă (precum toate teoremele lui S) în acea clasă de cadre, dar să nu fie o teoremă a lui S. Iar dacă o astfel de formulă există, atunci avem temeiuri bune să asertăm incompletitudinea lui S, întrucât există cel puţin o formulă validă, adică validă potrivit aceluiaşi criteriu formal care conferă validitate tuturor teoremelor lui S, dar care nu este, totuşi, o teoremă a lui S.

Aşadar, pentru a arăta că S este incomplet, nu putem folosi 'validitatea unei formule în clasa tuturor cadrelor ***pentru*** S' în calitate de proprietate semantică pentru formula designată, proprietate care este instanţiată de către toate teoremele, dar nu şi de către formula care relevă incompletitudinea lui S. Deoarece, aşa cum am văzut, dacă adoptăm această noţiune de validitate, nici un sistem modal nu este incomplet. Aceasta sugerează că, incontestabil, partea cea mai dificilă a executării unei

demonstrații de incompletitudine nu este aceea de a arăta că formula designată este validă în aceeaşi clasă de cadre în care toate teoremele lui S sunt valide, ci de a arăta că formula designată nu poate fi produsă în calitate de teoremă, folosind regulile lui S.

Pentru a putea realiza această parte din urmă a demonstrației, trebuie să concepem o proprietate potrivită, pe care să o aibă toate teoremele lui S, dar care să lipsească formulei designate. Dacă ne preocupă 'natura' acestei proprietăți, atunci ar fi de dorit ca proprietatea pe care o căutăm pentru a îndeplini funcția specificată să fie o proprietate semantică şi una care să fie, totodată, decidabilă. Deoarece, abia dacă ar fi lămuritor cum anume, să zicem, o proprietate sintactică, pe care ar avea-o toate teoremele lui S, dar care i-ar lipsi formulei designate, ar putea contribui la stabilirea unui rezultat ***semantic*** legat de S, şi anume incompletitudinea sa relativ la o clasă de interpretări semantice corespunzătoare (cadre), față de care sistemul este corect.

Prin urmare, strategia pe care trebuie să o definim pentru a îndeplini cele două sarcini schițate mai înainte, şi anume să arătăm validitatea formulei designate în aceeaşi clasă de cadre care validează toate teoremele lui S **şi** să arătăm că formula designată nu este derivabilă în S, va implica în mod fundamental două sisteme diferite. Cele două sisteme, să zicem S şi S′, trebuie să fie, într-un anumit fel, legate între ele semantic. Unul dintre ele, fie acesta S, se va arăta că este incomplet. Iar temeiul este exact următorul: chiar dacă formula designată (care aparține celuilalt sistem, S′) este validă în fiecare cadru **pentru** sistemul (incomplet) S, ea nu este o teoremă a acestui din urmă sistem. Iar, la rândul său, faptul acesta din urmă se obține, pentru că toate teoremele lui S au o proprietate (semantică), pe care formula designată nu o are.

Dar aici ne lovim imediat de o problemă. De obicei, pentru a arăta că o formulă nu este o teoremă a unui sistem, trebuie să găsim un *cadru* în care toate

axiomele şi teoremele acelui sistem sunt valide, în timp ce acea formulă nu este. Totuşi, în cazul celor două sisteme S şi S' pe care le-am considerat aici, exact *această* metodă este aceea de care nu ne putem folosi. Deoarece, din moment ce fiecare cadru pentru S este totodată un cadru pentru S' nu poate să existe nici un cadru în care axiomele lui S să fie valide, iar formula designată, care este una dintre axiomele lui S', să fie nevalidă. Desigur, am putea încerca să găsim un *model* în care axiomele lui S sunt valide, iar formula designată nu este, iar aşa ceva se poate obţine cu uşurinţă. Totuşi, o astfel de strategie nu va funcţiona drept strategie de demonstrare a incompletitudinii lui S. Întrucât, aşa cum am semnalat în capitolul precedent, *validitatea într-un model* (care este un concept perfect legitim în el însuşi) nu ne este de ajutor pentru proiectul nostru de aici, pentru că ea nu este conservată de către regula Substituţiei Uniforme. Cu alte cuvinte, faptul că formula designată este nevalidă în acel model în care toate axiomele lui S sunt valide *nu garantează* incompletitudinea lui S, deoarece formula designată poate fi, cu toate acestea, o teoremă a lui S.

Sistemul incomplet VB

Pentru a vedea cum lucrează mecanismul acesta, vom privi îndeaproape un sistem modal incomplet foarte simplu, denumit VB, pe care-l datorăm lui J. F. A. K. Van Benthem.[1]

VB este o extindere proprie a sistemului K. K este cel mai slab sistem modal normal şi are drept unică secvenţă-axiomă modală secvenţa

(**K**) $\vdash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

[1] Vezi Van Benthem, J. F. A. K. 'Two Simple Incomplete Modal Logics', *Theoria*, Volumul XLIV, 1978, Partea I, pg. 25-37. Cf., de asemenea, Van Benthem, J. F. A. K. *Modal Logic and Classical Logic*, Bibliopolis, 1983; Forbes, Graeme *An Introduction to Modal Logic*, Tulane University, 1994; Hughes, G. E. şi M. J. Cresswell *A Companion to Modal Logic*, Methuen, London - New York, 1984; Hughes, G. E. şi Cresswell M. J. *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London -New York, 1996.

care este adăugată la o bază axiomatică corectă şi completă pentru logica propoziţională non-modală. Regulile de inferenţă ale lui K sunt aceleaşi ca şi ale oricărui alt sistem normal, şi anume SU, →E, şi N.

VB este K + secvenţa-axiomă

(**VB**) $\vdash \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B)$.

Pentru a arăta acum că VB este incomplet în sensul absolut clarificat mai sus, adică necaracterizabil prin nici o clasă de cadre, trebuie să luăm în considerare un alt sistem denumit MV, care are, aşa cum vom vedea îndată, o anumită relaţie semantică cu VB. Astfel, MV este din nou K + (de data aceasta)

(**MV**) $\vdash \Diamond\Box A \vee \Box A$.

Incompletitudinea lui VB va decurge din demonstraţia următoarelor două fapte:

(I) Fiecare cadru pentru VB este un cadru pentru MV;

(II) **MV** nu este o teoremă a lui VB.

Cum anume concură (I) şi (II) la stabilirea incompletitudinii lui VB se poate înţelege fără mare greutate. Deoarece fiecare cadru pentru VB este un cadru pentru MV, nici un model care este un contraexemplu la oricare dintre tezele lui MV, şi *a fortiori* un contraexemplu pentru **MV**, nu va fi bazat pe un cadru pentru VB. Pentru a formula chestiunea într-un mod mai direct, dacă se obţine (I), fiecare teză a lui MV, şi *a fortiori* axioma modală caracteristică a lui MV, va fi validă în fiecare cadru pentru VB. Prin urmare, $\vDash_{\mathcal{K}} \Diamond\Box A \vee \Box A$, unde $\mathcal{K}$ este clasa cadrelor pentru VB.

Dar acum, potrivit lui (II), va exista o formulă VB-validă, şi anume **MV**, care nu este o teoremă a lui VB. Cu alte cuvinte, punând la un loc (I) şi (II), fiecare cadru pentru VB validează o anumită non-teoremă a lui VB, anume **MV**. Aşadar, din

moment ce există o formulă validă în clasa *tuturor* cadrelor relativ la care VB este corect, iar această formulă nu este o teoremă a lui VB, decurge că VB nu este complet relativ la clasa tuturor acelor cadre, care sunt cadre pentru VB. Prin urmare, VB nu este caracterizabil de către nici o clasă de cadre.

Pentru a da acum o demonstrație lui (I) de mai sus, avem nevoie, în calitate de element pregătitor, de un rezultat pe care îl vom presupune ca fiind deja stabilit. Rezultatul privește caracterizarea lui MV și arată că acest sistem este caracterizat de către clasa cadrelor în care toate lumile sunt 'mioape'. Această metaforă înseamnă că fiecare lume w în fiecare cadru, în clasa cadrelor care caracterizează pe MV, este sau un 'drum înfundat', adică nu vede nici o lume (w este un drum înfundat ddacă $(\forall u)$ $\sim Rwu$), sau poate vedea numai drumuri înfundate, adică $(\forall u)(Rwu \rightarrow (\forall v) \sim Ruv)$.

Și acum, pentru a stabili (I), să presupunem, urmărind o demonstrație prin contrapoziție, că $\mathcal{F}$ este un cadru care nu este pentru MV. Vom putea arăta, atunci, că $\mathcal{F}$ nu este un cadru nici pentru VB. Din moment ce MV = K + **MV**, și fiecare cadru *este* un cadru pentru K, decurge că acest cadru pe care l-am ales, $\mathcal{F}$, va respinge pe **MV**. Așadar, $\not\models_{\mathcal{F}} \Diamond\Box A \vee \Box A$. După cum se știe, aceasta înseamnă că există un model $\mathcal{M}$ bazat pe $\mathcal{F}$ și o lume $w \in W_{\mathcal{M}}$ astfel încât $(\mathcal{M}, w) \not\models \Diamond\Box A \vee \Box A$. Acum, așa cum am spus, MV este caracterizat de către clasa cadrelor în care relația de accesibilitate este mioapă. Deoarece $\mathcal{F}$ respinge pe **MV**, decurge că în $W_{\mathcal{F}}$ există o lume care (a) nu este un drum înfundat și (b) care nu vede un drum înfundat. În particular, potrivit lui (a) există o lume u pe care lumea w, care respinge pe **MV**, poate să o vadă.

Putem arăta acum că într-un astfel de cadru $\mathcal{F}$, **VB** este și ea respinsă, ceea ce încheie demonstrația lui (I) de mai sus. Astfel, $\not\models_{\mathcal{F}} \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$.

Pentru scopul acesta, fie $\mathcal{M}'$ un nou model bazat pe acelaşi cadru $\mathcal{F}$ pentru limbajul $\mathcal{L}$= {A, B}, şi fie $V_{\mathcal{M}'}$ o funcţie definită pentru 'A' şi 'B' în felul următor:

V(A) = $\varnothing$ (adică, 'A' este falsă la fiecare lume în $\mathcal{M}'$), şi

V(B) = $W - \{u\}$ (adică, 'B' este adevărată la fiecare lume în $\mathcal{M}'$ cu excepţia lumii u, unde u este lumea arbitrar aleasă mai sus, în aşa fel încât w poate să o vadă).

Arătăm acum că lumea w în $W_{\mathcal{F}}$ care respinge pe **MV** respinge şi pe **VB**, deoarece există un model $\mathcal{M}'$ bazat pe acelaşi cadru $\mathcal{F}$ în aşa fel încât $(\mathcal{M}', w) \not\models \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$. Desigur, pentru a arăta *aceasta*, trebuie să arătăm că $(\mathcal{M}', w) \not\models \Diamond\Box A$ şi că $(\mathcal{M}', w) \not\models \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$.

$(\mathcal{M}', w) \not\models \Diamond\Box A$ decurge din (a) şi (b), adică din faptul că w nu este un drum înfundat şi că nu vede un drum înfundat, şi din definiţia lui V în acest model, care o face pe 'A' falsă peste tot în $\mathcal{M}'$. Căci fie u o lume pe care poate să o vadă w. Din moment ce u nu este un drum înfundat ((b) de mai sus), ea poate să vadă o lume v la care 'A' este falsă. Deci, $(\mathcal{M}', u) \not\models \Box A$, şi din moment ce u a fost aleasă în mod arbitrar şi Rwu, decurge că $(\mathcal{M}', w) \not\models \Diamond\Box A$.

Pentru a arăta că $(\mathcal{M}', w) \not\models \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$, este suficient să arătăm că $(\mathcal{M}', w) \models \sim\Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$, care prin paşi echivalenţi succesivi evidenţi devine

(1) $(\mathcal{M}', w) \models \Diamond\sim(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$,

(2) $(\mathcal{M}', u) \models \sim(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$, pentru cel puţin un u astfel încât Rwu, şi

(3) $(\mathcal{M}', u) \models \Box(\Box B \rightarrow B) \,\&\, \sim B$.

Într-adevăr, se poate uşor observa că (3) este adevărată în această interpretare, deoarece modelul verifică ambii săi conjuncți. $(\mathcal{M}', u) \models \sim B$, întrucât $V_{\mathcal{M}'}(B) = W_{\mathcal{M}'} - \{u\}$, şi astfel $u \notin V(B)$ (ceea ce înseamnă că B este falsă la u în acest model). De asemenea, $(\mathcal{M}', u) \models \Box(\Box B \rightarrow B)$. Pentru că, din moment ce u nu este un drum înfundat, există cel puțin o lume pe care u poate să o vadă. Fie acum v oricare lume de felul acesta, adică $(\exists v)Ruv$. Acum, dacă $v = u$, atunci există cel puțin o lume pe care poate să o vadă u, şi anume pe ea însăşi, care o face pe 'B' falsă şi în consecință, $(\mathcal{M}', v) \models \Box B \rightarrow B$ (condiționalul are un antecedent fals); şi dacă $v \neq u$, deoarece $v \in V(B)$, $(\mathcal{M}', v) \models \Box B \rightarrow B$, din nou ($v$ face adevărat consecventul 'B'). Deci, fiecare lume pe care u poate să o vadă face pe '$\Box B \rightarrow B$' adevărată, ceea ce ne dă rezultatul cerut că $(\mathcal{M}', u) \models \Box(\Box B \rightarrow B)$.

Să rezumăm această primă parte a demonstrației incompletitudinii lui VB: am arătat că dacă există un cadru $\mathcal{F}$, în aşa fel încât $\not\models_{\mathcal{F}} \Diamond\Box A \vee \Box A$, adică $\mathcal{F}$ o respinge pe **MV**, atunci acelaşi cadru va produce rezultatul că $\not\models_{\mathcal{F}} \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$, cu alte cuvinte $\mathcal{F}$ o va respinge şi pe **VB**. Citind aceasta prin contrapoziție, deoarece fiecare cadru este un cadru pentru K, iar VB = K + **VB** şi MV = K + **MV**, acest rezultat înseamnă că fiecare cadru pentru VB este un cadru pentru MV.

Ne ocupăm acum de a doua parte a demonstrației şi arătăm că **MV** nu este o teoremă a lui VB. Aşadar, incompletitudinea lui VB va decurge de aici, pentru că în acord cu prima parte a demonstrației fiecare cadru $\mathcal{F}$ **pentru** VB este în aşa fel încât $\models_{\mathcal{F}} \Diamond\Box A \vee \Box A$, dar potrivit celei de-a doua părți a demonstrației, pe care o executăm acum, $\not\vdash_{VB} \Diamond\Box A \vee \Box A$.

Modul cel mai direct de a arăta că $\nvdash_{VB} \Diamond\Box A \vee \Box A$ ar fi, desigur, folosirea clasei de cadre $\mathcal{K}$ pentru VB. Deoarece, bazându-ne pe corectitudinea lui VB relativ la această clasă de cadre, pentru a arăta că $\nvdash_{VB} \Diamond\Box A \vee \Box A$, este suficient să găsim un model $\mathcal{M}$ bazat pe un cadru din acea clasă, în aşa fel încât la o lume w în acel model $(\mathcal{M}, w) \not\Vdash \Diamond\Box A \vee \Box A$.

Ca o observaţie colaterală, aş vrea să fac aici remarca succintă că această metodă semantică este analoagă strategiei generale a demonstrării independenţei Postulatului al V-lea al lui Euclid faţă de celelalte grupuri de axiome ale geometriei euclidiene, şi totodată, această metodă ne reaminteşte de demonstraţia dată de P. Bernays faptului că cea de-a patra axiomă a lui Russell & Whitehead, din sistemul lor axiomatic pentru calculul propoziţional din *Principia Mathematica*, nu este independentă de celelalte patru axiome. De fapt, dacă am prezenta detaliile metodei folosite în aceste demonstraţii, atunci am descoperi că structura generală a acelor demonstraţii este aceea a găsirii unei interpretări atât pentru enunţurile dintr-o anumită mulţime de enunţuri cât şi pentru enunţul despre care urmează să se arate că este independent, după care se arată că în acea interpretare, fiecare enunţ din mulţimea respectivă instanţiază o anumită proprietate, în timp ce enunţul independent nu o instanţiază.

Totuşi, este evident că potrivit demonstraţiei de mai sus, care ne spune că fiecare cadru pentru VB este un cadru pentru MV, exact această metodă nu ne stă la dispoziţie: deoarece **MV** este validă în **fiecare** cadru relativ la care VB este corect; prin urmare, în fiecare cadru în care fiecare teză a lui VB este validă, **MV** este şi ea validă. Oricum, această dificultate poate fi ocolită, dacă putem concepe o anumită proprietate, care este de aşa natură încât toate teoremele lui VB o instanţiază, în timp

ce **MV** nu o instanțiază. Ideea ingenioasă, pe care a conceput-o Van Benthem, a fost de a se lua drept acea proprietate, proprietatea validității fiecărei teoreme a lui VB într-o clasă de modele, o proprietate pe care **MV** nu o are. O întrebare firească, pe care ne-o putem pune, este cum anume ne va fi de folos această proprietate aici? Căci știm că validitatea într-un model nu este conservată de către substituția uniformă, și prin urmare, a arăta că **MV** nu este validă în clasa modelelor în care toate teoremele lui VB sunt valide, nu este o garanție că **MV** nu este o teoremă a lui VB.

Există două feluri în care putem considera aparatul care este necesar aici pentru a construi această proprietate și pentru a o face relevantă în schema generală a demonstrației. Unul din felurile de a privi la aceste lucruri constă în a stabili un cadru și apoi în a restricționa clasa modelelor, de care este nevoie pentru a da demonstrația, la o submulțime proprie a clasei tuturor modelelor bazate pe acel cadru. Motivația pentru a limita codomeniul lui V în fiecare model în clasa $\mathcal{D}$ este aceea ca **VB** și oricare dintre instanțele sale substituție să fie valide în $\mathcal{D}$, în timp ce **MV** și oricare dintre instanțele sale substituție să fie nevalide în aceeași clasă de modele. Pentru a face acest punct mai specific, fiecare model care va fi considerat mai departe este bazat pe un anumit cadru $\mathcal{F}$, care este un exemplu de cadru *recesiv*, iar clasa modelelor $\mathcal{D}$, de care este nevoie în demonstrație, este generată prin restricționarea funcției de valorizare V în fiecare model $\mathcal{M} \in \mathcal{D}$, în așa fel încât pentru fiecare literă-propoziție π_i din limbaj (pentru care este definit fiecare model din $\mathcal{D}$), V ia valori doar într-o submulțime proprie a mulțimii putere a lui W. Cu alte cuvinte, codomeniul lui V este o submulțime a lui $\mathcal{P}(W)$, fiecare membru al ei fiind sau o submulțime finită a lui $W - \{u\}$ sau complementara fiecărei submulțimi de acest fel din W, unde u este o lume în W. Proprietatea pe care o are fiecare teoremă a lui VB, dar care lipsește lui **MV** și fiecărei instanțe-substituție a ei, este proprietatea de a fi validă în clasa de

modele $\mathcal{D}$. De fapt, metoda aceasta va funcționa, dacă putem arăta că în $\mathcal{D}$ validitatea formulelor este conservată de către substituția uniformă.

Un alt fel de a ne apropia de această problemă, care va fi lămuritor pentru dezvoltări ulterioare ale acestei chestiuni, este acela de a schimba noțiunea de cadru care este implicată în această construcție. Într-adevăr, în modelele pe care le-am folosit înainte, care, așa cum spuneam, pentru a face o distincție clară sunt numite *modele-Kripke*, funcției de valorizare V i s-a permis, ca să zicem așa, să ia valori în ***toată*** mulțimea putere $\mathcal{P}(W)$ a mulțimii de lumi W. Schimbarea noțiunii de cadru, și în consecință a aceleia de model, care este operată în contextul acestei construcții, va consta exact din adăugarea la elementele obișnuite care alcătuiesc un cadru-Kripke a mulțimii judecăților admisibile din W. Astfel, potrivit acestei concepții, un cadru $\mathcal{F}$, care, pentru a păstra distincția clară, va fi denumit un *cadru-general* (Van Benthem), este un triplet ordonat $\mathcal{F} = (W, R, G)$, unde W și R sunt definite ca mai înainte, iar G este o mulțime de mulțimi, fiecare element al ei fiind o mulțime de lumi din W.

În consecință, un model general $\mathcal{G}$ va fi un model al cărui cadru este un cadru-general. Astfel, $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, V) = (W, R, G, V)$. Într-un model-general $\mathcal{G}$, spre deosebire de un model-Kripke, V ia valori într-o submulțime proprie a mulțimii tuturor submulțimilor lui W. (Desigur, un cadru, sau un model-Kripke, este un caz special al unui cadru, sau respectiv al unui model-general, și anume cazul în care $G = \varnothing$, și $V(\sigma) \in \mathcal{P}(W)$, σ fiind o fbf oarecare.)

Acum, motivația fundamentală a folosirii unui cadru-general în demonstrația incompletitudinii lui VB este aceea de a ne pune nouă înșine la dispoziție o metodă prin care să arătăm non-derivabilitatea în VB a unei formule care este, totuși, validă în aceeași clasă de cadre-Kripke în care toate teoremele lui VB sunt valide. Aceasta se va realiza arătând independența semantică a acelei formule față de fiecare axiomă și

teoremă a lui VB. Dar independența semantică cerută nu poate fi arătată folosind o clasă de cadre-Kripke, deoarece **MV** *este* validă în fiecare cadru-Kripke în care sunt valide teoremele lui VB. Aşadar, pentru a realiza acest scop, avem nevoie de o clasă de modele, fiecare dintre ele fiind bazat pe un cadru-general. Mai mult, deoarece scopul nostru aici este de a arăta că fiecare propoziție este adevărată în acea clasă de modele, dacă fiecare literă-propoziție este adevărată în aceeaşi clasă, vom avea nevoie de un argument prin inducție pe lungimea formulelor. Aşadar, mulțimea *G*, care este decisivă în această construcție, trebuie să fie aleasă în aşa fel încât dacă mulțimea mundană (*mulțimea mundană* = mulțimea lumilor din domeniul unei interpretări la care o propoziție este adevărată) a fiecărei litere-propoziție este o membră a lui *G*, mulțimea mundană a oricărei formule construite din acele litere-propoziție va fi o membră a mulțimii *G*. Pentru a obține aceasta, *G* trebuie să fie închisă față de complementare, tocmai pentru a ne asigura că funcționează inducția pe *f*-~, față de reuniune, pentru a ne asigura că funcționează argumentul inductiv pentru *f*-∨, şi că satisface, de asemenea, condiția că ori de câte ori mulțimea *A* este o membră a lui *G*, tot aşa este şi mulțimea tuturor lumilor care pot vedea *numai* pe membrele lui *A*, pentru ca inducția pe *f*-□ să meargă.

În felul acesta suntem conduşi la următoarele constrângeri abstracte pentru o structură, care vor face ca structura să joace rolul dorit în demonstrarea faptului că toate teoremele lui VB sunt valide în clasa $\mathcal{D}$ de modele, în timp ce **MV** şi substituțiile sale instanță nu sunt:

(*W*, *R*, *G*) este un *cadru-general* ddacă

(1) *W* este o mulțime nevidă;

(2) *R* este o relație diadică pe *W*;

(3) G este o mulțime de submulțimi ale lui W, adică $G \subset \mathcal{P}(W)$, care satisface următoarele constrângeri:

(a) Dacă $A \in G$, atunci $\text{comp}_W(A) \in G$;

(b) Dacă $A \in G$, și $B \in G$, atunci $A \cup B \in G$;

(c) Dacă $A \in G$, atunci $\{w \in W: (\forall w' \in W)(Rww' \rightarrow w' \in A)\} \in G$.

Un model bazat pe un cadru-general (W, R, G), adică un model-general, va fi oricare model (W, R, G, V), în care V restricționează mulțimea mundană a fiecărei litere-propoziție π_i la mulțimea G; astfel, $\{w \in W; (\mathcal{M}, w) \vDash \pi_i\} \in G$.

Să urmărim acum detaliile construcției:

Cadrul-general $\mathcal{F} = (W, R, G)$, pe care este bazat fiecare model din $\mathcal{D}$, este definit în felul următor:

(i) $W = \{u, v, w_0, w_1, w_2, \ldots\}$, adică o mulțime denumerabilă care constă dintr-o colecție infinită de lumi $\{w_i\}_{i \in N}$ (N mulțimea numerelor naturale), și încă două lumi u și v;

(ii) Rw_jw_i ddacă $i < j$, pentru fiecare i, j din N; Ruw_i, $i \in$ N; și Rvu.

(iii) $G = \{X \subset W: X$ este finită și $u \notin X$ sau comp(X) este finită și $u \in X\}$.

Mai intuitiv, mulțimea G, care poate fi denumită mulțimea *judecăților admisibile* din W, poate fi generată prin următoarea procedură:

(1) luați fiecare submulțime finită X a lui W sau submulțime infinită Y a lui W care are o complementară finită în W;

(2) dacă X este finită și $u \notin X$, atunci introduceți pe X în G;

(3) dacă Y este infinită și are o complementară finită în W și $u \in Y$, atunci introduceți pe Y în G;

(4) nimic altceva nu va fi un element al lui G.

Aşadar, G este o mulțime de mulțimi, fiecare element al ei fiind sau o mulțime finită, dacă lumea u nu este o membră a ei, sau o mulțime infinită, dacă aceasta este complementara unei mulțimi finite şi ea (mulțimea infinită) o are pe u drept una dintre membrele ei. (Este important să se observe că G este închisă față de complementare.)

În fine, mulțimea de modele $\mathcal{D}$ este definită de către condiția că fiecare $\mathcal{M} \in \mathcal{D}$ este în aşa fel încât $\mathcal{M} = (W, R, G, V)$, cu $V(\pi_i) \in G$ pentru fiecare literă-propoziție π_i din limbaj, pentru care este definit modelul. Astfel, prin restricția impusă aici asupra lui V, fiecare literă-propoziție poate fi adevărată în mulțimea G a judecăților admisibile. Cu alte cuvinte, pentru fiecare literă-propoziție π_i *mulțimea* ei *mundană* este o mulțime în G.

Pentru ca proprietatea de a fi validă în mulțimea $\mathcal{D}$ de modele să joace rolul care-i este destinat în schema generală a demonstrației, trebuie să arătăm că ***toate*** teoremele lui VB au această proprietate. Demonstrația acestui fapt cere stabilirea unui rezultat preliminar, şi anume acela că proprietatea unei propoziții de a avea *mulțimea* ei *mundană* în G, dacă toate literele sale propoziție constituente îşi au mulțimile lor mundane în G, este conservată de către toate regulile de formare sintactice (proceduri de construire recursivă a formulelor mai complexe din propoziții mai puțin complexe). Rezultatul preliminar de care avem nevoie este următorul:

Lema 2.1: Fie $\mathcal{M}$ un model $(\mathcal{F}, V)$, unde $\mathcal{F}$ este cadrul-general recesiv definit mai sus şi V este funcția de valorizare restricționată, aşa cum s-a indicat înainte. Dacă σ este o propoziție ale cărei litere-propoziție constituente sunt $\pi_1, \ldots, \pi_n$, şi $V(\pi_i) \in G$, $1 \leq i \leq n$, atunci $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \sigma\} \in G$.

Demonstrație: Prin inducție pe lungimea formulelor modale. Este suficient să se arate că (f-~), (f-$\vee$) şi (f-$\Box$) conservă proprietatea indicată în teorema de mai sus, deoarece cei trei conectori formează o mulțime expresiv completă de conectori.

Să observăm mai întâi că baza demonstrației prin inducție este dată de ipoteza Lemei, adică, literele-propoziție iau valori în G.

Acum, pentru (f-~), să presupunem ipoteza inducției, şi anume $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \sigma\} \in G$. Ceea ce trebuie să arătăm este că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \sim\sigma\} \in G$. Mulțimea aceasta din urmă este complementara celei dintâi. Aşadar, rezultatul căutat decurge imediat din definiția lui G, care face ca această mulțime să fie închisă față de complementare.

Pentru (f-$\vee$), potrivit ipotezei inducției asumăm $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\} \in G$ şi $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Psi\} \in G$, şi trebuie să arătăm că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi \vee \Psi\} \in G$. Este suficient să arătăm că G este închisă față de reuniune, deoarece mulțimea care face adevărată pe $\ulcorner \Phi \vee \Psi \urcorner$ este mulțimea reuniune a mulțimilor care fac adevărate pe Φ şi respectiv pe Ψ. Cu alte cuvinte, ceea ce trebuie să artătăm aici este că dacă mulțimea mundană a lui Φ, fie aceasta A, este o membră a lui G şi mulțimea mundană a lui Ψ, fie aceasta B, este o membră a lui G, atunci mulțimea mundană a lui $\ulcorner \Phi \vee \Psi \urcorner$, reuniunea lui A cu B, este o membră a lui G. Să stipulăm acum că A este în G şi că B este în G. Distingem trei cazuri:

Cazul 1: A şi B sunt ambele finite. Deoarece fiecare mulțime este o membră a lui G, potrivit definiției lui G, $u \notin A$, şi $u \notin B$. Aşadar, $A \cup B$ este o mulțime finită şi $u \notin A \cup B$. Deci, prin definiția lui G, $A \cup B \in G$.

Cazul 2: A şi B sunt ambele infinite. Deoarece singurele mulțimi infinite din G sunt acelea ale căror complementare sunt finite şi complementarele nu o conțin pe u, decurge din definiția lui G că mulțimile complementare ale lui A şi B, adică $\overline{A}$ şi respectiv $\overline{B}$, sunt ambele finite şi $u \notin \overline{A}$ şi $u \notin \overline{B}$. Aşadar, $\overline{A} \cap \overline{B}$ este finită şi

$u \notin \overline{A} \cap \overline{B}$. Dar atunci, $\overline{A} \cap \overline{B} \in G$, şi din moment ce $A \cup B = \text{comp}(\overline{A} \cap \overline{B})$, iar G este închisă față de complementare, decurge că $A \cup B \in G$.

Cazul 3: Să presupunem, fără pierdere de generalitate, că A este finită şi B este infinită. Arătăm că dacă A este în G şi B este în G, atunci $A \cup B \in G$. $A \cup B$ este infinită, din moment ce B este infinită. Acum, deoarece B este infinită şi $B \in G$, decurge din definiția lui G că $\overline{B}$ este finită şi $u \in B$. În consecință, $u \notin \overline{B}$, şi deci $u \notin \overline{A} \cap \overline{B}$. Aşadar, $\overline{A} \cap \overline{B}$ este finită şi $u \notin \overline{A} \cap \overline{B}$. Decurge că $\overline{A} \cap \overline{B} \in G$, şi din moment ce $A \cup B = \text{comp}(\overline{A} \cap \overline{B})$ şi G este închisă față de complementare, obținem, aşa cum se cere, $A \cup B \in G$. Astfel, ca o consecință a Cazurilor 1, 2 şi 3, există o demonstrație a rezultatului că dacă $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\} \in G$ şi $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Psi\} \in G$, atunci $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi \vee \Psi\} \in G$.

(f-$\Box$): Asumăm ipoteza inducției, şi anume $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\} \in G$, şi arătăm că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \in G$. Pentru aceasta, este suficient să considerăm două cazuri care sunt un fel de terț exclus în cadrul recesiv $\mathcal{F}$.

Cazul 1: există cel puțin un i astfel încât $w_i \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$. Atunci pentru fiecare $j > i$, dacă Rji atunci $w_j \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. Cadrul $\mathcal{F}$ este aranjat în aşa fel încât pentru fiecare i, Rui, şi astfel u poate să vadă acele lumi w_i care nu sunt în mulțimea mundană a lui Φ. În consecință, $u \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. Mai mult, din mulțimea de lumi $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ cel mult un număr ***finit*** de lumi $\{w_c\}_{c<i}$ sunt de aşa fel încât pentru fiecare $w \in \{w_c\}$, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$, şi $u \notin \{w_c\}_{c<i}$. Prin urmare, mulțimea mundană a lui '$\Box\Phi$' este finită şi nu conține lumea u. Deci, potrivit definiției lui G, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \in G$.

Cazul 2: pentru fiecare i, $w_i \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$. Atunci, pentru fiecare i, $w_i \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$, şi deoarece Ruw_i, $u \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. Dacă relaţia $v \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$ are sau nu are loc, va depinde de faptul dacă relaţia $u \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$ se obţine sau nu. Acum, dacă $u \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$, atunci $v \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$, şi deci $W_{\mathcal{F}} \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. În acest caz, $\text{comp}(\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}) = \varnothing$, şi din moment ce $\varnothing \in G$, şi G este închisă faţă de complementare decurge că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \in G$. Dacă, pe de altă parte, $u \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$, atunci $v \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. Acum, $\text{comp}(\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}) = \{v\}$, şi deoarece $u \notin \{v\}$, şi $\{v\}$ este finită, atunci potrivit definiţiei lui G, $\{v\} \in G$, şi acelaşi lucru este valabil pentru complementara sa, adică $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \in G$. Astfel, în oricare dintre cazuri, mulţimea mundană a lui $\Box\Phi$ este o membră a lui G, adică $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \in G$. *Q. E. D.*

Să observăm acum că rolul pe care-l joacă acest rezultat în strategia generală a demonstraţiei incompletitudinii lui VB este mai clar scos la lumină de către următorul

Corolar 2.2: În fiecare model din $\mathcal{D}$, mulţimea mundană a fiecărei propoziţii este un element al lui G.

Întrucât, potrivit acestui Corolar, ne asigurăm de următorul rezultat, şi anume că dacă fiecare formulă este adevărată numai în G, dat fiind că fiecare dintre literele sale propoziţie sunt adevărate numai în G, atunci fiecare formulă la care se ajunge prin

aplicări ale regulilor SU, Nec şi →E asupra formulelor care sunt adevărate numai în G va fi ea însăşi adevărată numai în G.

Putem arăta acum că fiecare VB-secvenţă este $\mathcal{D}$-validă, adică este validă în fiecare model $\mathcal{M} \in \mathcal{D}$.

Lema 2.3: Dacă $\Sigma \vdash_{\mathrm{VB}} \sigma$ atunci pentru fiecare $\mathcal{M} \in \mathcal{D}$, $\Sigma \vDash_{\mathcal{M}} \sigma$.

Demonstraţie: Fiecare secvenţă K-demonstrabilă este validă în clasa oricăror modele, şi deci *a fortiori* în $\mathcal{D}$. Ştim, de asemenea, că →E, şi Nec conservă validitatea într-un model. Rămâne să arătăm că validitatea în $\mathcal{M}$, pentru fiecare $\mathcal{M} \in \mathcal{D}$, este conservată de către fiecare instanţă-substituţie a axiomei caracteristice a lui VB, şi anume

(**VB**) $\vdash \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$.

Fie acum acea instanţă-substituţie formula

(**VB.s**) $\vdash \Diamond\Box p \vee \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$.

Arătăm *aceasta* pentru fiecare $\mathcal{M} \in \mathcal{D}$, şi pentru fiecare $w \in W_{\mathcal{M}}$.

(i) În $\mathcal{F}$, w_0 este un drum înfundat. Aşadar, oricare necesitare este adevărată la w_0, şi *a fortiori*

$(\mathcal{M}, w_0) \vDash \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$

de unde decurge că

$(\mathcal{M}, w_0) \vDash \Diamond\Box p \vee \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$.

(ii) În $\mathcal{F}$, $(\forall w_i) w_i \in W - \{w_0\}$ este astfel încât $Rw_i w_0$, şi de asemenea Ruw_0. Cu alte cuvinte, în $\mathcal{F}$, fiecare lume cu excepţia lui w_0 însăşi şi a lui v poate să vadă un drum înfundat. În consecinţă, dacă $w_i \neq w_0$ şi $w_i \neq v$, atunci

$(\mathcal{M}, w_i) \vDash \Diamond\Box p$

şi

$(\mathcal{M}, u) \vDash \Diamond\Box p$

de unde decurge că

(a) $(\mathcal{M}, w_i) \vDash \Diamond\Box p \vee \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$

şi

(b) $(\mathcal{M}, u) \vDash \Diamond\Box p \vee \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$.

Rămâne să arătăm că **VB.s** este adevărată la v în fiecare model din $\mathcal{D}$. Construim o demonstrație prin contrapoziție şi ne propunem să arătăm că dacă **VB.s** este falsă la v într-un model oarecare din $\mathcal{D}$, atunci $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash q\} \notin G$. Cu alte cuvinte, dacă **VB.s** este falsă la această lume v într-un model $\mathcal{M}$ bazat pe $\mathcal{F}$, atunci mulțimea mundană a lui q conține cel puțin o membră (o lume) care nu aparține lui G. Dar atunci, potrivit Corolarului 2.2, acel model care o respinge pe **VB.s** nu este un membru al lui $\mathcal{D}$. Aşadar, dacă modelul *este* în $\mathcal{D}$, atunci **VB.s** nu poate fi respinsă de către el. Deoarece acest rezultat este valabil în aceeaşi măsură pentru fiecare model din $\mathcal{D}$, decurge că **VB.s** nu poate fi respinsă de către nici un model din $\mathcal{D}$, şi că, aşadar, **VB.s** este $\mathcal{D}$-validă.

Pentru început, să presupunem că **VB.s** este falsă la v, într-un model $\mathcal{M}$, care este un membru al lui $\mathcal{D}$. Atunci,

$(\mathcal{M}, v) \nvDash \Diamond\Box p \vee \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$.

Din aceasta decurge atât

(c) $(\mathcal{M}, v) \nvDash \Diamond\Box p$

cât şi

(d) $(\mathcal{M}, v) \nvDash \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$.

Arătăm că în cazul (d) se obține că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash q\} \notin G$. Într-adevăr, din (d) de mai sus, decurge că există o lume pe care v poate să o vadă şi care face falsă propoziția '$\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q$'. Din moment ce u este singura lume pe care poate să o vadă v, aceasta înseamnă că u este *acea* lume, şi aşadar,

(e) $(\mathcal{M}, u) \nvDash \Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q$.

În consecință,

(f) $(\mathcal{M}, u) \vDash \sim(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$

de unde decurge

(g) $(\mathcal{M}, u) \vDash \Box(\Box q \rightarrow q) \ \& \sim q$

(astfel, u nu este o q-lume, adică $u \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash q\}$).

Din (g) decurge că $(\forall w_i)Ruw_i$ este în aşa fel încât

(h) $(\mathcal{M}, w_i) \vDash \Box q \rightarrow q$

şi din moment ce w_0 este un drum înfundat, decurge mai întâi că

(i) $(\mathcal{M}, w_0) \vDash \Box q$

şi apoi, din (h) şi (i), că

(j) $(\mathcal{M}, w_0) \vDash q$.

Acum, singura lume pe care poate să o vadă w_1 este w_0 şi w_0 *este* o q-lume. Aşadar,

(k) $(\mathcal{M}, w_1) \vDash \Box q$

şi din (h) şi (k) obținem

(l) $(\mathcal{M}, w_1) \vDash q$.

O reiterare a acestui raționament produce rezultatul că pentru fiecare i

(m) $(\mathcal{M}, w_i) \vDash q$

ceea ce înseamnă că $\{w_i\}_{i \in \mathbf{N}} \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash q\}$.

Astfel, am putut arăta două lucruri, şi anume (1) că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash q\}$ este infinită, şi (2) (vezi (g) mai sus) că $u \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash q\}$. Dar atunci, complementara mulțimii mundane a lui q este finită şi u este o membră a ei. Aşadar, nici mulțimea mundană a lui q şi nici complementara ei nu sunt membre ale lui G. Bazându-ne pe Corolarul 2.2, potrivit căruia mulțimea mundană a fiecărei propoziții în fiecare model din $\mathcal{D}$ este un element al lui G, ceea ce s-a arătat până aici este că modelul care respinge pe **VB.s** nu este un membru al lui $\mathcal{D}$. Aşadar, dacă modelul *este* în $\mathcal{D}$, atunci nu poate să o falsifice pe **VB.s**, şi prin urmare

(n) $(\mathcal{M}, v) \vDash \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$

de unde decurge, aşa cum dorim, că

(o) $(\mathcal{M}, v) \vDash \Diamond\Box p \vee \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$.

(a), (b), şi (o) luate împreună arată că '$\Diamond\Box p \vee \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$' este adevărată la fiecare lume în fiecare model $\mathcal{M} \in \mathcal{D}$, ceea ce înseamnă că

$\vDash_{\mathcal{D}} \Diamond\Box p \vee \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$.

Arătăm acum că axioma caracteristică a lui MV, şi anume (**MV**) $\Diamond\Box A \vee \Box A$, nu este $\mathcal{D}$-validă. Astfel, ea este respinsă la o lume într-un model din $\mathcal{D}$.

Lema 2.4: Există un model $\mathcal{M}$ în $\mathcal{D}$ care o respinge pe **MV**, adică $(\mathcal{M}, w) \nvDash \Diamond\Box A \vee \Box A$.

Demonstrație: Fie $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model bazat pe cadrul recesiv $\mathcal{F}$, definit de către funcția de valorizare $V(A) = \varnothing$ (funcția de valorizare pentru oricare altă literă-propoziție, dacă există vreuna, este irelevantă pentru scopurile noastre de aici, care sunt acelea de a o respinge pe **MV**). $\mathcal{M} \in \mathcal{D}$: codomeniul lui $V_{\mathcal{M}}$ este restricționat la G, din moment ce codomeniul este $\varnothing$, și $\varnothing \in G$. Putem arăta acum că $(\mathcal{M}, v) \not\models \Diamond\Box A \vee \Box A$ pentru că $(\mathcal{M}, v) \not\models \Diamond\Box A$ și $(\mathcal{M}, v) \not\models \Box A$.

$(\mathcal{M}, v) \not\models \Diamond\Box A$, deoarece u este singura lume pe care poate să o vadă lumea v și $(\mathcal{M}, u) \not\models \Box A$, iar această relație din urmă se obține la rândul ei, deoarece potrivit definiției lui V, 'A' este falsă la fiecare lume în $\mathcal{M}$, și astfel pentru cel puțin un i, Ruw_i și $(\mathcal{M}, w_i) \not\models A$.

$(\mathcal{M}, v) \not\models \Box A$ pentru că Rvu, și $(\mathcal{M}, u) \not\models A$, din moment ce în acest model $V(A) = \varnothing$.

Ne aflăm acum la finalul demonstrației principalului rezultat care este prezentat în acest capitol, și anume

Teorema 2.5: VB este incomplet, adică nu este caracterizat de către nici o clasă de cadre.

Demonstrație: Să presupunem că avem o clasă $\mathcal{K}$ de cadre pentru VB, adică de cadre relativ la care VB este corect. Potrivit unui rezultat demonstrat anterior (vezi (I) p. 59), fiecare cadru din $\mathcal{K}$ este un cadru relativ la care fiecare MV-secvență este validă. Astfel, $\vdash_{MV} \Diamond\Box A \vee \Box A$ este validă relativ la $\mathcal{K}$. Dar acum, în acord cu Lemele 2.3 (de la pagina 71) și 2.4 (de la pagina 74), există o secvență, anume $\vdash_{MV} \Diamond\Box A \vee \Box A$, care este validă în clasa $\mathcal{K}$, în care toate teoremele lui VB sunt valide, dar care nu

este VB-demonstrabilă. Deoarece $\mathcal{K}$ este oricare clasă de cadre pentru VB, aceasta finalizează demonstrația că VB este incomplet relativ la oricare clasă de cadre, față de care VB este corect, şi astfel VB este incomplet într-un sens absolut.

Comentarii asupra demonstrației de incompletitudine a sistemului VB

O consecință imediată a demonstrației de incompletitudine a sistemului VB, care leagă acest rezultat de chestiunea mai generală a tehnicii modelului canonic discutată în capitolul anterior, este că VB, precum oricare alt sistem incomplet normal, este un sistem non-canonic. Un sistem canonic este exact acel sistem care este corect față de cadrul modelului său canonic. Cu alte cuvinte, pentru ca un sistem să fie canonic, cadrul modelului său canonic trebuie să fie un cadru ***pentru*** acel sistem. Pentru a înțelege ce înseamnă că VB nu este canonic, este suficient să observăm că fiecare sistem canonic este complet, adică este caracterizabil de către o clasă de cadre. Pentru a păstra lucrurile la un nivel de simplitate rezonabil, să luăm drept acea clasă care caracterizează sistemul clasa unitate al cărei unic element este cadrul modelului canonic al acelui sistem. Deoarece sistemul este canonic, prin definiție cadrul modelului său canonic va fi un cadru ***pentru*** sistem, şi aşadar, pentru oricare mulțime de propoziții Σ, şi oricare propoziție σ, unde '$\mathcal{F}_{CMS}$' este o prescurtare pentru 'cadrul modelului canonic pentru S'

dacă $\Sigma \vdash_S \sigma$, atunci $\Sigma \models_{\mathcal{F}_{CMS}} \sigma$.

Pentru a arăta acum conversa, să presupunem că $\Sigma \models_{\mathcal{F}_{CMS}} \sigma$. Atunci, prin definiția validității într-un cadru, $\Sigma \models_{\mathcal{M}} \sigma$, pentru fiecare model $\mathcal{M}$ bazat pe cadrul modelului canonic al lui S, indiferent dacă S este sau nu canonic. *A fortiori* pentru cazul în care $\mathcal{M}$ este exact modelul canonic al lui S. Să ne reamintim acum că potrivit

unui corolar al teoremei modelului canonic, o formulă este validă în modelul canonic al lui S dacă şi numai dacă formula este derivabilă drept una dintre teoremele lui S. Adică, în cazul în care $\mathcal{C}_S$ este modelul canonic al lui S, $\Sigma \models_{\mathcal{C}_S} \sigma$ ddacă $\Sigma \vdash_S \sigma$. Deci, am putut arăta că dacă $\Sigma \models_{\mathcal{F}c.MS} \sigma$ (adică secvenţa este validă în cadul modelului canonic pentru sistemul S), atunci $\Sigma \vdash_S \sigma$ (adică există o S-demonstraţie pentru acea secvenţă).

Punând laolaltă corectitudinea şi completitudinea pentru acest sistem canonic arbitrar S, ceea ce obţinem este că există o clasă de cadre, care în cazul considerat aici constă în mulţimea unitate al cărei unic membru este cadrul modelului canonic al lui S, care caracterizează sistemul canonic S, făcând astfel pe S complet într-un sens absolut. (Desigur, nu există nici o sugestie implicită aici de a pune semn de egalitate între a fi canonic şi a fi complet. Deoarece nu există nimic *a priori* absurd în a concepe un sistem care *este* caracterizat de către o clasă de cadre, deşi sistemul nu este canonic; şi de fapt, pentru anumite sisteme acesta chiar este cazul.) Să citim acum prin contrapoziţie acest rezultat: dacă un sistem este incomplet, atunci el este, de asemenea, non-canonic.

Putem să arătăm acum că elementul de ingeniozitate în demonstrarea incompletitudinii lui VB este folosirea unei anumite clase de modele, fiecare dintre acestea fiind bazat pe un cadru general. Mai mult, proprietatea cerută pentru a arăta independenţa lui **MV** faţă de fiecare secvenţă a lui VB nu va juca rolul care i se atribuie, dacă codomeniul funcţiei de valorizare nu este restricţionat la clasa G a *unora* dintre submulţimile mulţimii de lumi W. Ideea aici este că dacă codomeniul lui V în fiecare model este întreaga mulţime putere a lui W, atunci nu fiecare secvenţă din VB este validă în clasa modelelor bazate pe $\mathcal{F}$. Cu alte cuvinte, dacă ceea ce folosim

în cel de-al doilea stadiu al demonstrației de incompletitudine este o clasă de modele-Kripke bazate pe $\mathcal{F}$, în locul clasei $\mathcal{D}$ a modelelor generale bazate pe $\mathcal{F}$, atunci va exista cel puțin o VB-secvență care nu va fi validă în cel puțin un model, în acea clasă de modele-Kripke. Mai specific, putem arăta că **VB** este falsificabilă într-un model-Kripke bazat pe $\mathcal{F}$.

Fie acum $\mathcal{N} = (W, R, V)$ un model bazat pe $\mathcal{F}$, în așa fel încât $V(\mathrm{A}) = W - \{w_0\}$, și $V(\mathrm{B}) = W - \{u\}$. Este evident că $\mathcal{N} \notin \mathcal{D}$, deoarece codomeniul lui V nu este un membru al mulțimii G: este adevărat că mulțimea mundană a lui B este infinită, deoarece $\{w_i\}_{i \in \mathrm{N}}$ este infinită, și complementara ei este finită, deoarece comp($W - \{u\}$) este finită, dar $u \notin \{w_i\}_{i \in \mathrm{N}}$, contrar definiției lui G, în cadrul general pe care se bazează fiecare model din clasa $\mathcal{D}$.

În acest 'aranjament', putem arăta că $\mathcal{N}$ o respinge pe **VB**. Astfel, există o lume, și anume v, în modelul $\mathcal{N}$ astfel încât

$$(\mathcal{N}, v) \nvDash \Diamond\Box\mathrm{A} \vee \Box(\Box(\Box\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{B}) \rightarrow \mathrm{B}).$$

Aceasta decurge din faptul că

$$(\mathcal{N}, v) \nvDash \Diamond\Box\mathrm{A}$$

și din

$$(\mathcal{N}, v) \nvDash \Box(\Box(\Box\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{B}) \rightarrow \mathrm{B}).$$

$(\mathcal{N}, v) \nvDash \Diamond\Box\mathrm{A}$, deoarece $(\forall w \in W)$ dacă Rvw atunci $(\mathcal{N}, w) \nvDash \Box\mathrm{A}$. De fapt, există numai o singură lume de acest fel în $\mathcal{F}$, anume u, și $(\mathcal{N}, u) \nvDash \Box\mathrm{A}$, deoarece $(\exists w \in W)$ astfel încât Ruw și $(\mathcal{N}, w) \nvDash \mathrm{A}$. Într-adevăr, Ruw_0 și potrivit definiției lui V din acest model $\mathcal{N}$, $(\mathcal{N}, w_0) \nvDash \mathrm{A}$.

Pe de altă parte, $(\mathcal{N}, v) \not\models \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$ deoarece $(\exists w \in W)$ astfel încât Rvw şi $(\mathcal{N}, w) \not\models \Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B$. Într-adevăr, Rvu şi $(\mathcal{N}, u) \not\models \Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B$. La rându-i, $(\mathcal{N}, u) \not\models \Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B$, deoarece $(\mathcal{N}, u) \models \Box(\Box B \rightarrow B)$ şi $(\mathcal{N}, u) \not\models B$. Relaţia din urmă se obţine deoarece $V(B) = W - \{u\}$, şi aşadar $u \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \models B\}$. Relaţia dintâi se obţine şi ea deoarece $(\forall w \in W)$ dacă Ruw atunci $(\mathcal{N}, w) \models \Box B \rightarrow B$. Într-adevăr, u poate vedea pe fiecare w_i, $1 \leq i \leq n$, şi $(\mathcal{N}, w_i) \models B$, făcând astfel adevărat consecventul lui '$\Box B \rightarrow B$', şi astfel adevărat condiţionalul însuşi.

O altă întrebare înrudită este dacă schimbarea definiţiei mulţimii judecăţilor admisibile G din cadrul general $\mathcal{F}$ va avea sau nu anumite consecinţe asupra construirii proprietăţii semantice cerute, care arată că **MV** nu este o teoremă a lui VB. Cu alte cuvinte, putem ridica aici două probleme diferite, dar care sunt gemene. Şi anume, (1) dacă există o mulţime G' de submulţimi ale lui W care să fie diferită de G din $\mathcal{F} = (W, R, G)$, dar care să poată fi totuşi folosită pentru a arăta că fiecare VB-teoremă este $\mathcal{D}'$-validă, în timp ce **MV** nu este, cu condiţia ca codomeniul lui V în fiecare model $\mathcal{M}' \in \mathcal{D}'$, care este bazat pe acelaşi cadru recesiv, să fie noua mulţime G'. Cu alte cuvinte, există vreun fel de a modifica mulţimea G şi cu toate acestea să obţinem rezultatul că toate VB-secvenţele sunt valide într-o anumită clasă de modele generale, în timp ce **MV** nu este validă? Şi (2) dacă există un model *general* $\mathcal{M}'$ într-o clasă $\mathcal{D}'$ în aşa fel încât: (i) partea sa componentă (W, R) să fie identică cu aceea a lui $\mathcal{F}$ şi a fiecărui model $\mathcal{M} \in \mathcal{D}$; (ii) să se deosebească faţă de fiecare model general $\mathcal{M} \in \mathcal{D}$, care a fost folosit mai înainte, în ceea ce priveşte mulţimea judecăţilor admisibile şi, în consecinţă, în ceea ce priveşte codomeniul funcţiei sale de valorizare; şi (iii) să respingă formula **VB**. Cu alte cuvinte, se mai poate realiza respingerea lui

VB, dacă în locul utilizarii unui *model-Kripke* (aşa cum am făcut mai sus), folosim un *model-general* bazat pe acel cadru $\mathcal{F}$?

La cea de-a doua întrebare răspunsul este afirmativ şi putem uşor arăta aceasta. Deoarece, pentru a demonstra că **nu** fiecare VB-secvenţă este validă în această nouă clasă de modele generale, ale căror funcţii de valorizare sunt restricţionate la o mulţime Γ de submulţimi ale lui W, unde $\Gamma \neq G$, este suficient să o alegem pe Γ în aşa fel încât o demonstraţie inductivă pe lungimea fbf-urilor, demonstraţie care să urmărească să arate că mulţimea mundană a fiecărei fbf este o membră a mulţimii Γ, să nu funcţioneze. Iată aici un posibil candidat pentru această mulţime Γ de judecăţi admisibile:

$\Gamma = \{X \subset W: X = Y$, dacă Y este finită şi $u \notin Y$ sau $X = \text{comp}(Y)$, dacă Y este finită şi $u \in Y\}$.

Cu alte cuvinte, mulţimea Γ va consta din exact acele submulţimi finite ale mulţimii de lumi W, fiecare membru fiind de aşa fel încât nu conţine lumea u, sau din acele mulţimi infinite care sunt complementarele fiecărei submulţimi finite ale mulţimii W, fiecare dintre acestea (submulţimile finite) conţinând-o pe u ca membră. Este evident că $\Gamma \neq G$, deoarece u nu apare în nici una dintre mulţimile de lumi pe care le conţine Γ, în timp ce u figurează ca membră a acelor mulţimi infinite care au complementare finite în W şi sunt ele însele membre ale lui G.

Este, de asemenea, uşor să arătăm că Γ nu este închisă faţă de complementare, ceea ce o face inutilă într-o demonstraţie inductivă de la care aşteptăm să ne arate că fiecărei propoziţii i se atribuie o valoare în mulţimea judecăţilor admisibile, cu condiţia ca tuturor literelor-propoziţie din componenţa sa să li se atribuie valori în aceeaşi mulţime de judecăţi admisibile. Astfel, în acord cu definiţia lui Γ, $\{w_0\} \in \Gamma$, deoarece $\{w_0\}$ este finită şi $u \notin \{w_0\}$. Aşadar, pentru ca Γ să fie închisă faţă de

complementare, complementara lui $\{w_0\}$ în $W_{\mathcal{F}}$ şi anume $\{v, u, w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$, trebuie să fie în Γ, dică $\{v, u, w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\} \in \Gamma$. Acum, mulţimea $\{v, u, w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$ este evident infinită, şi dacă ne uităm la definiţia lui Γ, cu două paragrafe în urmă, putem vedea că singurele mulţimi infinite care sunt membre ale lui Γ nu o conţin pe u ca membră, deoarece u figurează ca o membră a mulţimilor finite ale căror complementare infinite *sunt* membre ale lui Γ. Aşadar, $\{v, u, w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\} \notin \Gamma$, şi deci Γ nu este închisă faţă de complementare. Prin urmare, Γ nu poate juca rolul cerut de către demonstraţia prin inducţie, care urmăreşte să arate că mulţimea mundană a fiecărei fbf este o membră a lui Γ, cu condiţia ca mulţimea mundană a fiecărei litere-propoziţie componente să fie o membră a lui Γ.

Oricum, acest rezultat nu trebuie să ne reţină prea mult atenţia aici, deoarece el nu prezintă importanţă pentru strategia generală a demonstrării incompletitudinii lui VB. Motivul este la îndemână. Deoarece ***există o cale*** prin care putem arăta că fiecare VB-secvenţă este validă într-o clasă de modele şi că **MV** şi toate instanţele sale substituţie nu sunt, atunci rezultatul acesta este suficient pentru demonstraţia faptului că **MV nu poate** fi derivată ca o VB-teoremă, indiferent dacă putem arăta totodată că, folosind unele modele-Kripke sau modele-generale, **VB** este respinsă într-o clasă de modele.

Prima întrebare este mai grea. Ea este echivalentă cu întrebarea dacă există o altă cale de a stabili pe G, care să se deosebească de aceea folosită de Van Benthem, şi care să fie totuşi eficientă în a arăta că fiecare VB-secvenţă este validă într-o clasă restricţionată de modele şi că lui **MV** şi tuturor instanţelor sale substituţie le lipseşte această proprietate. Sau dacă nu există, atunci unica mulţime de submulţimi ale lui W care ne este de ajutor în această demonstraţie este G. Dacă ne uităm cu atenţie la rolul jucat de către G în demonstraţia de incompletitudine a lui VB, atunci ceea ce se poate

observa este că există doi parametri pe care trebuie să-i satisfacă selectarea fiecărei mulțimi de submulțimi ale lui W pentru ca acea mulțime aleasă să joace rolul pe care-l joacă G în demonstrație. (1) Mulțimea cerută Γ de submulțimi ale lui W trebuie să fie (i) închisă față de complementare, pentru ca argumentul prin inducție asupra lui $\sim$ să funcționeze, (ii) închisă față de reuniune, pentru ca argumentul prin inducție asupra lui $\vee$ să funcționeze, și (iii) trebuie să fie de așa natură încât dacă o anumită mulțime A de lumi este în Γ, atunci tot așa trebuie să fie fiecare mulțime de lumi ai cărei membri sunt lumi care pot să vadă *numai* pe membrii lui A, pentru a funcționa argumentul inductiv asupra lui $\Box$. Această rută ne va conduce la o clasă de modele Δ, fiecare membru având codomeniul funcției sale de valorizare restricționat la membrii lui Γ, și care sprijină argumentul inductiv în sensul că mulțimea mundană a fiecărei fbf este o membră a lui Γ, dacă mulțimea mundană a fiecărei litere-propoziție care intră în componența acelor fbf-uri este o membră a lui Γ. (2) Din moment ce vrem ca **MV** să fie nevalidă în mulțimea de modele Δ, care este de așa natură încât codomeniul funcției de valorizare al fiecărui model din acea mulțime este restricționat la mulțimea Γ, urmează că fiecare disjunct al lui (**MV**) $\vdash_{MV} \Diamond\Box A \vee \Box A$ este obligatoriu să fie respins la o anumită lume w într-un astfel de model $\mathcal{M} \in \Delta$. Știm că MV este caracterizat de către clasa de cadre-Kripke a cărei relație de accesibilitate este 'mioapă'. Așadar, pentru ca $(\mathcal{M}, w) \nvDash \Diamond\Box A$ și $(\mathcal{M}, w) \nvDash \Box A$ să aibă loc, mai întâi mulțimea mundană a lui A trebuie să fie o membră a lui Γ, și apoi cadrul pe care se bazează $\mathcal{M}$ trebuie să conțină o lume w, care nici nu este un drum înfundat și nici nu poate să vadă unul.

Întrebarea pe care o ridicăm aici poate fi acum reformulată: există vreo altă cale, în afara aceleia a aranjamentului conceput de Van Benthem pe baza mulțimii G

din demonstrația de incompletitudine a lui VB, ca o mulțime de submulțimi ale lui W să poată fi definită în așa fel încât atât condiția (1) cât și condiția (2) din aliniatul precedent să fie simultan satisfăcute?

Afirmația mea, acum, este că modul în care este stabilită relația de accesibilitate pe mulțimea de lumi W din cadrul $\mathcal{F}$ împreună cu condițiile (1) și (2) de mai sus, forțează ca oricare altă construcție care ar fi potrivită pentru scopurile celei de-a doua părți a demonstrației de incompletitudine a lui VB să aibă scufundată în ea o imagine a cadrului-general și a modelului, care sunt de fapt utilizate în demonstrația de incompletitudine a lui VB. Cu alte cuvinte, oricare alt cadru și mulțime de modele restricționate care sunt bazate pe acel alt cadru nu pot să îndeplinească funcția pe care o au cadrul $\mathcal{F}$ și mulțimea $\mathcal{D}$ în demonstrația de incompletitudine a lui VB, dacă celălalt cadru și celelalte modele, adică acele structuri, nu au scufundate în ele o imagine izomorfică cu $\mathcal{F}$ și respectiv cu $\mathcal{D}$. Pentru a fi mai precișii, acea condiție va reveni la următoarele: cadrul (recesiv) general $\mathcal{F} = (W, R, G)$ și modelul $\mathcal{M} \in \mathcal{D}$ bazat pe $\mathcal{F}$, care sunt folosite în demonstrația de facto a incompletitudinii lui VB, sunt *imagini pseudo-epimorfice* (sau pe scurt, *p-morfice*)[2] ale oricărui alt cadru-general și, respectiv, model bazat pe el, care vor funcționa pentru scopurile aceleiași demonstrații.

Voi da în continuare o demonstrație prin examinare exhaustivă a cazurilor relevante. Metoda pe care o folosesc constă în a concepe în mod succesiv mulțimi alternative de judecăți admisibile, schimbând condiția asupra lui G, în așa fel încât fiecare nouă mulțime Γ să aibă, cel puțin la o primă vedere, plauzibilitate în calitate de candidat pentru ceruta mulțime de judecăți admisibile, pentru ca apoi să o resping, sprijinindu-mă în respingerea prezumptivei noi mulțimi pe temeiuri bune.

[2] Cf. K. Segerberg (1971), pg. 37 și G. E. Hughes și M. J. Cresswell (1984), pg. 70-71, pentru definiția acestui concept în teoria modelelor pentru logica modală.

Să considerăm drept primă candidată pentru Γurmătoarea mulțime G^i:

$G^i = \{X \subset W: X$ este infinită, şi are o complementară finită, şi $u \notin X$, sau comp(X) este infinită, şi $u \in X\}$. (W şi R sunt desigur aceleaşi mulțimi precum în cadrul original $\mathcal{F}$ de mai înainte.)

Nu este greu să vedem că $G^i \neq G$. Deoarece, potrivit definiției lui G, $\{u, w_i\}_{i \in N} \in G$, întrucât $\{u, w_i\}_{i \in N}$ este o mulțime infinită, pentru că $\{w_i\}_{i \in N}$ este infinită, care are o complementară în W, anume mulțimea unitate $\{v\}$, şi $u \in \{u, w_i\}_{i \in N}$, în timp ce, în acord cu definiția lui G^i, nici o submulțime a lui W cu o complementară finită, submulțime infinită care o are pe u ca membră, nu este la rândul ei o membră a lui G^i; aşadar, $\{u, w_i\}_{i \in N} \notin G^i$. Acum, este G^i o mulțime de judecăți admisibile care poate să joace în demonstrație acelaşi rol pe care-l joacă mulțimea inițială G? Pentru a putea da un răspuns afirmativ, se cere să se ruleze o demonstrație similară pentru Lema că fiecare VB-secvență este validă într-o clasă $\mathcal{D}^i$ de modele în timp ce **MV** nu este validă, unde clasa $\mathcal{D}^i$ de modele este acum clasa modelelor alcătuite din aceleaşi W şi R precum în cadrul original $\mathcal{F}$, dar în care V este în aşa fel încât $V(\pi_i) \in G^i$, pentru fiecare literă-propoziție π_i.

Totuşi, de ce să o considerăm pe G^i în acest context? G^i este o candidată promițătoare, deoarece este închisă față de complementare. Totuşi, nu este foarte greu să arătăm că G^i nu este închisă față de reuniune şi nici nu satisface condiția pentru o inducție asupra lui $\Box$. Aşadar, deşi această nouă mulțime de judecăți admisibile satisface condiția (1)(i), ea nu satisface condițiile (1)(ii) şi (1)(iii) din lista de la pagina 82. Nu este foarte greu să verificăm că deşi există o demonstrație pentru cazul (f-~) cu această nouă mulțime G^i, nu poate exista nici o versiune adaptată a demonstrației Lemei 2.1 pentru cazurile (f-$\vee$) şi (f-$\Box$) cu G^i în locul lui G în cadrul-general $\mathcal{F}$.

Astfel, pentru (f-~) asumăm ipoteza inducției, anume $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \sigma\} \in G^i$ şi arătăm că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \sim\sigma\} \in G^i$. Rezultatul este imediat, din definiția lui G^i care face mulțimea aceasta închisă față de complementare, întrucât mulțimea $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \sim\sigma\}$ este complementara în W a mulțimii $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \sigma\}$.

Dar cu (f-$\vee$), deşi cazurile 1 şi 2 funcționează, ne lovim de o problemă în cel de-al treilea caz.

Potrivit ipotezei inducției, asumăm $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\} \in G^i$ şi $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Psi\} \in G^i$ şi dacă ar fi cazul că G^i ar putea fi noua noastră mulțime de judecăți admisibile, atunci am putea arăta că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi \vee \Psi\} \in G^i$. Relația aceasta din urmă s-ar obține, dacă G^i ar fi închisă față de reuniune. Cu alte cuvinte, ceea ce trebuie arătat aici, oglindind demonstrația similară care o antrenează pe mulțimea G, este că dacă mulțimea mundană a lui Φ este o membră a lui G^i şi mulțimea mundană a lui Ψ este o membră a lui G^i, atunci mulțimea mundană a lui $\ulcorner \Phi \vee \Psi \urcorner$ este o membră a lui G^i. Fie acum A şi B în G^i. Putem deosebi trei cazuri:

Cazul 1: A şi B sunt ambele infinite. Din moment ce fiecare mulțime este o membră a lui G^i, în acord cu definiția lui G^i, $u \notin A$, $u \notin B$ şi ambele mulțimi au complementare finite în W. Aşadar, $A \cup B$ este o mulțime infinită cu o complementară finită şi $u \notin A \cup B$. Prin urmare, prin definiția lui G^i, $A \cup B \in G^i$.

Cazul 2: A şi B sunt ambele finite. Deoarece singurele mulțimi finite în G^i sunt acelea ale căror complementare sunt infinite şi complementarele nu o conțin pe u, decurge din definiția lui G^i că complementarele lui A şi B, adică $\overline{A}$ şi respectiv $\overline{B}$, sunt ambele infinite şi $u \notin \overline{A}$ şi $u \notin \overline{B}$. Aşadar, $\overline{A} \cap \overline{B}$ este infinită şi $u \notin \overline{A} \cap \overline{B}$.

Dar atunci, $\overline{A} \cap \overline{B} \in G^i$, şi din moment ce $A \cup B = \text{comp}(\overline{A} \cap \overline{B})$ şi G^i este închisă faţă de complementare decurge că $A \cup B \in G^i$.

Cazul 3: Să presupunem fără pierdere de generalitate că A este infinită şi B este finită. Putem arăta că G^i nu este potrivită pentru a sprijini argumentul inductiv în acest caz. Aşadar, mai în general, din $A \in G^i$ şi $B \in G^i$ nu decurge că $A \cup B \in G^i$. Punctul nodal al demonstrării acestui caz este de a se arăta, dacă este posibil, că $\overline{A} \cap \overline{B} \in G^i$. Pentru că atunci, din moment ce G^i este închisă faţă de complementare, $\text{comp}(\overline{A} \cap \overline{B}) \in G^i$. Dar $\text{comp}(\overline{A} \cap \overline{B}) = A \cup B$, şi astfel $A \cup B \in G^i$.

Să concepem acum strategia acestei prezumtive demonstraţii printr-un raţionament regresiv. Din moment ce se asumă că A este o membră a lui G^i, atunci potrivit definiţiei lui G^i, $\overline{A}$ este finită. În acest caz, bine înţeles, $\overline{A} \cap \overline{B}$ este finită, şi pentru ca această mulţime reuniune să fie o membră a lui G^i, potrivit definiţiei lui G^i, $u \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Din această apartenenţă a lui u decurge că $u \in \overline{A}$ şi $u \in \overline{B}$. Totuşi, $u \in \overline{B}$ nu se poate obţine, întrucât (i) $\overline{B} \in G^i$, din moment ce $B \in G^i$, (ii) $\overline{B}$ este infinită, din moment ce B este finită, şi prin urmare (iii) potrivit definiţiei lui G^i, $u \notin \overline{B}$.

Evident, toate acestea sunt suficiente pentru a elimina pe G^i de pe poziţia de nouă candidată pentru rolul pe care-l joacă G în demonstraţie. Totuşi, tocmai pentru a vedea mai clar felul în care funcţionează realmente demonstraţia autentică, merită să urmărim puţin mai departe temeiurile pentru care G^i nu poate să fie mulţimea noastră de judecăţi admisibile. Astfel, o altă problemă a mulţimii G^i este aceea că nu sprijină argumentul inductiv asupra lui $\Box$. Totuşi, chiar dacă aceasta nu ajută în general în demonstraţie, putem arăta că există un model $\mathcal{M}$ în mulţimea modelelor $\mathcal{D}^i$ în care

codomeniul lui V este restricționat la G^i în așa fel încât **MV** este respinsă la o lume w în acel model, adică $(\mathcal{M}, w) \nvDash \Diamond\Box A \vee \Box A$.

Motivul pentru care G^i eșuează în privința inducției pe $\Box$ este că G^i nu satisface condiția generală și abstractă pe care trebuie să o satisfacă oricare mulțime Γ de judecăți admisibile, pentru ca (f-$\Box$) din argumentul inductiv să funcționeze. Și anume, dacă $A \in \Gamma$, atunci $\{w \in W: (\forall w' \in W)(Rww' \rightarrow w' \in A)\} \in \Gamma$. Cu alte cuvinte, ori de câte ori mulțimea A este o membră a lui Γ tot așa este și mulțimea tuturor lumilor care pot să vadă *numai* membre ale lui A. Căci din moment ce mulțimea $\{w_i\}_{i \in N}$ este infinită, are o complementară finită în W, și $u \notin \{w_i\}_{i \in N}$ decurge, în acord cu definiția lui G^i că $\{w_i\}_{i \in N} \in G^i$. Dar atunci, dacă condiția care face posibilă inducția pe $\Box$ ar fi respectată, ar trebui, de asemenea, să fie cazul că $\{u, w_j\}/w_0 \in G^i$, unde $j \in N$, și $j \neq 0$, din moment ce fiecare lume din mulțimea $\{u, w_j\}/w_0$ poate să vadă *numai* lumi din mulțimea $\{w_i\}_{i \in N}$. Într-adevăr, $(\forall w_i)Ruw_i$ și $(\forall w_j)Rw_jw_i$, dacă $w_j \in \{u, w_j\}/w_0$, unde $j > i$. Totuși, potrivit definiției lui G^i, $\{u, w_j\}/w_0 \notin G^i$ pentru că $\{u, w_j\}/w_0$, unde $j \in N$, și $j \neq 0$, este o mulțime infinită cu o complementară finită și $u \in \{u, w_j\}/w_0$.

Iar acum, pentru a demonstra că există un model $\mathcal{M} \in \mathcal{D}^i$, a cărui funcție de valorizare V este în așa fel încât codomeniul ei este restricționat la G^i, care poate să o respingă pe **MV**, să remarcăm la început că pentru ca un model să poată face aceasta, el trebuie să satisfacă următoarele condiții:

(i) Mai întâi, în fiecare model $\mathcal{M} \in \mathcal{D}^i$ bazat pe cadrul $\mathcal{F}$(**MV**) $\Diamond\Box A \vee \Box A$ nu poate fi respinsă la nici o altă lume decât la v. w_0 este un drum înfundat, și prin urmare '$\Box A$' trebuie să fie adevărată indiferent ce valoare de adevăr atribuie w_0 lui 'A', și în consecință tot așa este și **MV** însăși. Fiecare w_i, unde $i \in N$, și $i \neq 0$ poate să o vadă pe

w_0, şi astfel poate să vadă o lume la care '□A' este adevărată. Aşadar, '◇□A' trebuie să fie adevărată la fiecare astfel de lume w_i ceea ce face, de asemenea, adevărată din nou pe **MV** la fiecare w_i, unde $i \in$ N, şi $i \neq 0$. În fine, u poate să vadă pe fiecare w_i, $i \in$ N. Aşadar, '◇□A' trebuie să fie adevărată la u pentru că u poate să o vadă pe w_0 şi w_0 o face adevărată pe '□A'. Prin urmare, la u **MV** însăşi este din nou adevărată. Merită să observăm aici că acest rezultat, care în rezumat ne spune că **MV** nu poate fi respinsă la nici o lume din mulţimea $\{u, w_i\}_{i \in N}$ în nici un model $\mathcal{M} \in \mathcal{D}^i$, a fost obţinut în mod independent faţă de oricare atribuire de valori de adevăr pentru litera-propoziţie 'A', şi deci depinde în întregime de felul în care este aranjat cadrul pe care se bazează fiecare astfel de model. În consecinţă, pentru ca **MV** să fie respinsă într-un model $\mathcal{M} \in \mathcal{D}^i$ bazat pe cadrul $\mathcal{F}$, modelul **trebuie** să conţină o lume, fie aceasta v, în aşa fel încât $(\mathcal{M}, v) \not\models \Diamond\Box A$ şi $(\mathcal{M}, v) \not\models \Box A$.

(ii) În al doilea rând, v trebuie să vadă cel puţin o lume, fie aceasta u, care nu este o A-lume, i. e. Rvu şi $(\mathcal{M}, u) \not\models A$, pentru ca relaţia $(\mathcal{M}, v) \not\models \Box A$ să aibă loc.

(iii) În al treilea rând, fiecare lume pe care poate să o vadă v, trebuie să fie în aşa fel încât cel puţin o lume pe care poate să o vadă fiecare astfel de lume nu este o A-lume, i. e. $(\forall w)(Rvw \rightarrow (\exists w')(Rww' \ \& \ (\mathcal{M}, w') \not\models A))$, exact pentru ca relaţia $(\mathcal{M}, v) \not\models \Diamond\Box A$ să aibă loc.

(Tot aşa cum am procedat şi până acum, trec cu nonşalanţă şi aici peste distincţia folosire-menţionare pentru a nu contribui inutil la creşterea complexităţii sintactice şi asum convenţia că fiecare item al limbajului obiect este propriul său nume în metalimbajul corespunzător.)

Aşadar, toate condiţiile (i) - (iii) din aliniatul precedent sunt satisfăcute simultan într-un model $\mathcal{M}$ bazat pe cadrul $\mathcal{F}$, dacă cel puţin $u \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \models A\}$,

şi $w_i \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash A\}$, pentru cel puțin un $i \in N$. Fie acum $V(A)$ acea funcție de valorizare pentru litera-propoziție 'A' care este definită drept $V(A) = W - \{u, w_0\}$. În consecință, mulțimea mundană a lui 'A' este infinită şi are o complementară finită şi u nu aparține mulțimii mundane. Deci, mulțimea mundană a lui 'A' satisface cerințele pentru a aparține mulțimii G^i a judecăților admisibile, adică $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash A\} \in G^i$. Fie acum $\mathcal{M}$ un model definit pentru limbajul {A} astfel încât $\mathcal{M} = (W, R, G^i, V)$, unde V este definită precum în acest aliniat. Afirmăm acum că $\mathcal{M} \in \mathcal{D}^i$, deoarece codomeniul lui V este G^i, şi $(\mathcal{M}, v) \nvDash \Diamond\Box A \vee \Box A$. Întrucât, aşa cum a relevat analiza de mai înainte, $(\mathcal{M}, v) \nvDash \Box A$, pentru că Rvu şi $(\mathcal{M}, u) \nvDash A$, deoarece $u \notin V(A)$, şi de asemenea $(\mathcal{M}, v) \nvDash \Diamond\Box A$, deoarece în cadrul $\mathcal{F}$, cu care lucrăm aici, unica lume pe care poate să o vadă v, şi anume u, o face falsă pe '$\Box A$' pentru că există o lume pe care u, la rândul ei, poate să o vadă, anume w_0, în care 'A' este falsă. Mai mult, 'A' este falsă la w_0 pentru că, potrivit definiției lui V, $w_0 \notin V(A)$.

Din moment ce mulțimea G^i nu funcționează în această demonstrație pentru că nu sprijină argumentul inductiv, am putea lua în considerare o variantă îmbunătățită a sa, care să funcționeze. Pentru a optimiza procesul heuristic, o morală mai generală pe care o putem învăța din eşecul mulțimii G^i este aceasta. Colapsul argumentului inductiv din cazul al treilea, al pretinsei demonstrații că mulțimea G^i a judecăților admisibile este închisă față de reuniune, indică faptul că pentru ca oricare mulțime Γ de judecăți admisibile să fie închisă față de reuniune este **necesar** şi nu numai suficient ca *o anumită lume să fie* ***exclusă din fiecare submulțime finită de lumi*** *care aparține lui* Γ, în timp ce *aceeaşi lume trebuie să fie inclusă în toate complementarele*

infinite ale acelor mulțimi finite, dacă întreaga mulțime Γ urmează și ea să fie închisă față de complementare.

Pentru a obține o bună înțelegere a condiției scrise în italice în aliniatul anterior, s-ar putea să fie util să ne reamintim demonstrația celui de-al treilea caz pentru (f-$\vee$), care este cerută pentru demonstrația lemei că **MV** nu este derivabilă ca o VB-teoremă. Cu excepția faptului că de data aceasta insistăm asupra unei citiri regresive a acestei demonstrații. Astfel, ceea ce trebuie demonstrat este că dacă A este o mulțime finită astfel încât $A \in G$, și B este o mulțime infinită astfel încât $B \in G$, atunci $A \cup B \in G$. Din moment ce G este închisă față de complementare, pentru a arăta că $A \cup B \in G$ va fi suficient să arătăm că $\overline{A} \cap \overline{B} \in G$. Deoarece $A \cup B =$ comp($\overline{A} \cap \overline{B}$). Acum, deoarece B este infinită și $B \in G$ știm că $\overline{B}$ este finită și $u \notin \overline{B}$. Așadar, $\overline{A} \cap \overline{B}$ este finită și $u \notin \overline{A} \cap \overline{B}$. Prin urmare, potrivit definiției lui G, $\overline{A} \cap \overline{B} \in G$. Dar tocmai pentru ca în această demonstrație să se poată face pasul de la finitudinea mulțimii intersecție $\overline{A} \cap \overline{B}$, și de la non-apartenența lui u la această mulțime, la apartenența aceleiași mulțimi intersecție la mulțimea G, lumea u nu trebuie să fie membră a lui $\overline{A} \cap \overline{B}$. Și pentru a obține acest rezultat la rândul său, este suficient să stipulăm că u se găsește în extensiunea lui B, ceea ce înseamnă că u este exclusă din extensiunea mulțimii infinite $\overline{B}$. Din moment ce B este arbitrară, aceasta revine la a spune că u este exclusă din extensiunea fiecărei mulțimi finite care este o membră a lui G. Punctul central al acestei afirmații, însă, este să arătăm că excluziunea lui u din fiecare mulțime finită care se găsește în G este totodată singurul lucru care ajută în acest context, și prin urmare este totodată și necesar. Într-adevăr, până acum știm că poate să existe numai un singur fel prin care se poate stabili non-apartenența lui u la fiecare mulțime din intersecția $\overline{A} \cap \overline{B}$. Căci, dacă în schimb

stipulăm că $u \notin \overline{A}$, atunci u va fi exclusă din fiecare mulțime infinită din G, deoarece $\overline{A}$ este infinită, din moment ce A este finită, iar această condiție revine la faptul că dăm peste aceeași condiție definitorie precum aceea pentru G^i, anume $G^i = \{X \subset W: X$ este infinită, și are o complementară finită și $u \notin X$ sau comp(X) este infinită și $u \in X\}$, despre care am demonstrat că nu funcționează, tocmai pentru că nu este satisfăcută inducția pe $\vee$. Deci, singurul fel în care putem face acea intersecție o membră a unei mulțimi utilizabile Γ de judecăți admisibile constă în a exclude o lume, anume lumea u în cazul considerat aici, din fiecare mulțime ***finită*** care urmează să fie o membră a lui Γ.

Cu scopul de a obține, dacă este posibil, o altă mulțime de judecăți admisibile care poate să îndeplinească funcția lui G, și păstrând în minte întreaga discuție de mai înainte, să considerăm acum mulțimea G^{ii}, care, deși satisface condiția excluderii unei lumi din fiecare submulțime finită pe care o conține, se deosebește prin altceva față de mulțimea inițială G a judecăților admisibile. Așadar, fie următorul caz:

$G^{ii} = \{X \subset W: X$ este infinită și $u \in X$ sau X este finită și $u \notin X\}$.

Mulțimea G^{ii} satisface condiția precedentă. Totuși, nici ea nu trece drept mulțimea de judecăți admisibile de care avem nevoie în demonstrație. Deoarece, dintru început, G^{ii} nici măcar nu este închisă față de complementare, după cum se poate arăta cu ușurință. Astfel, mulțimea $X = \{u, w_{2i}\}_{i \in N}$ este o membră a lui G^{ii} deoarece este infinită, întrucât are o submulțime proprie infinită, anume $\{w_{2i}\}_{i \in N}$, și în mod evident $u \in X$. Totuși, complementara lui X, anume $\{v, w_{2i+1}\}_{i \in N}$, este și ea infinită, deoarece $\{w_{2i+1}\}_{i \in N}$ este infinită, dar nu poate fi o membră a lui G^{ii} pentru că $u \notin \{v, w_{2i+1}\}_{i \in N}$, adică $u \notin$ comp(X). Și pentru ca oricare mulțime infinită de

mulțimi să satisfacă condiția care să-i asigure apartenența la mulțimea G^{ii}, fiecare dintre aceste mulțimi trebuie să o conțină pe u ca membră.

În același timp, nu este greu de observat că G^{ii} este doar la o foarte mică distanță față de mulțimea G, care este utilizabilă în demonstrație. Desigur, acesta este un pas mic, dar care este extrem de important pentru demonstrație. Căci într-adevăr, dacă adăugăm clauza ' ... cu o complementară finită' primului disjunct din definiția lui G^{ii} de mai sus, atunci ceea ce se obține este 'X este o mulțime infinită cu o complementară finită și $u \in X$' care este o parafrază a clauzei 'comp(X) este finită și $u \in X$'. Desigur, clauza aceasta din urmă este identică cu cel de-al doilea disjunct al condiției care o definește pe mulțimea G, și așadar, exceptând ordinea celor doi disjuncți, care este oricum irelevantă, mulțimea G^{ii} astfel rafinată nu este nimic altceva decât mulțimea G.

Pentru a încheia demonstrația noastră, trebuie să mai examinăm două cazuri; anume

$G^{iii} = \{X \subset W$: X este finită și $w_k \notin X$ sau comp(X) este finită și $w_k \in X$, unde k este un număr natural finit suficient de mare$\}$

și

$G^{iv} = \{X \subset W$: X este finită și $v \notin X$ sau comp(X) este finită și $v \in X\}$.

Neajunsul lui G^{iii} este că **VB** nu este validă în mulțimea $\mathcal{D}^{iii}$ de modele în care fiecare model $\mathcal{M} \in \mathcal{D}^{iii}$ este în așa fel încât codomeniul funcției sale de valorizare V este restricționat la mulțimea G^{iii} a judecăților admisibile. Dar atunci, punctul central al demonstrației că **MV** nu este VB-derivabilă eșuează, din moment ce totul aici depinde de faptul că fiecare VB-secvență *este* validă într-o mulțime de modele (generale) în timp ce **MV** colapsează în cel puțin un model a cărui funcție de valorizare este restricționată la o mulțime de judecăți admisibile.

G^{iv} eşuează, la rândul său, pentru că nu poate sprijini primul caz al argumentului inductiv asupra lui $\Box$. Oricum, această mulțime de judecăți admisibile este o bună mărturie pentru ideea pe care am afirmat-o mai înainte că în construcția generală a demonstrației că **MV** nu este o VB-teoremă ceea ce se cere este ca fiecare (altă) structură să aibă scufundată în ea o imagine izomorfă cu aceea pe care o foloseşte Van Benthem în demonstrația originală.

Să aruncăm acum o privire la câteva detalii:

Nu este greu să vedem că cadrul general $\mathcal{G}^{iii} = (W, R, G^{iii})$ sprijină demonstrația inductivă a lemei care spune că mulțimea mundană a fiecărei fbf este o membră a lui G^{iii}, dacă mulțimea mundană a fiecărei litere-propoziție componentă a acelor fbf-uri este o membră a lui G^{iii}. Căci într-adevăr, se poate verifica cu uşurință că G^{iii} este închisă față de complementare şi față de reuniune. Mai mult, putem arăta că cerința corespunzătoare pentru ca inducția pe $\Box$ să funcționeze este şi ea satisfăcută, de vreme ce o uşoară adaptare a demonstrației originale pentru această lemă, în care apare mulțimea inițială G, poate fi dusă până la capăt.

Astfel, să presupunem că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\} \in G^{iii}$. Trebuie să arătăm că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \in G^{iii}$. Să ne reamintim că în această demonstrație este suficient să considerăm două cazuri, care sunt un fel de terț exclus în cadrul recesiv $\mathcal{F}$.

Cazul 1: există cel puțin un i astfel încât $w_i \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$. Atunci pentru fiecare $j > i$, dacă Rji atunci $w_j \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. Pentru un suficient de mare $k > i$, Rki ține în cadrul $\mathcal{F}$, şi astfel, de asemenea, $w_k \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. Mai mult, din mulțimea de lumi $\{w_i\}_{i \in N}$ cel mult un număr ***finit*** de lumi $\{w_c\}_{c<i}$ sunt în aşa fel încât pentru fiecare $w \in \{w_c\}$, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$, şi $w_k \notin \{w_c\}_{c<i}$. Prin

urmare, mulțimea mundană a lui '$\Box\Phi$' este finită și nu o conține pe w_k. Deci, potrivit definiției lui G^{iii}, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \in G^{iii}$.

Cazul 2: pentru fiecare i, $w_i \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$. Atunci, pentru fiecare i, $w_i \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$, și din moment ce Ruw_i, $u \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. Dacă relația $v \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$ are sau nu loc, va depinde de faptul dacă relația $u \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$ va avea sau nu loc. Acum, dacă $u \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$, atunci $v \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$, și prin urmare $W_{\mathcal{F}} \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. În acest caz, $\text{comp}(\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}) = \varnothing$, și din moment ce $\varnothing \in G^{iii}$, și G^{iii} este închisă față de complementare, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \in G^{iii}$. Dacă, pe de altă parte, $u \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$, atunci $v \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. Atunci $\text{comp}(\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}) = \{v\}$, și din moment ce $w_k \notin \{v\}$, și $\{v\}$ este finită, atunci potrivit definiției lui G^{iii}, $\{v\} \in G^{iii}$, și același lucru ține pentru complementara ei, adică $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \in G^{iii}$. Așadar, în oricare dintre cazuri, mulțimea mundană a lui '$\Box\Phi$' este o membră a lui G^{iii}, altfel spus, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \in G^{iii}$.

Oricum, după cum știm, temeiul alegerii unei mulțimi de judecăți admisibile este acela de a stabili o clasă de modele generale în care funcția de valorizare a fiecărui model să fie restricționată la acea mulțime de judecăți, cu scopul ca fiecare VB-secvență să fie validă în clasa modelelor respective, în timp ce **MV** să nu fie validă. Și exact acesta este rezultatul pe care nu-l putem obține, dacă mulțimea de

judecăți admisibile pe care o alegem este G^{ii}. Prin urmare, întreaga strategie a celei de-a doua etape a demonstrației incompletitudinii lui VB se prăbuşeşte în acest punct.

Aşa cum a relevat analiza noastră precedentă, **MV** poate să eşueze, dacă într-adevăr eşuează, numai la o lume v într-un model bazat pe cadrul $\mathcal{F}$. Similaritatea dintre **MV** şi **VB** cu privire la structura lor logică în mare, şi anume ambele formule sunt disjuncții ale căror primi disjuncți corespunzători sunt posibilități ale unei necesitări şi ale căror disjuncți secunzi sunt o necesitare, explică de ce o analiză similară se va aplica şi lui **VB**. Din moment ce sistemul VB este sistemul K plus secvența **VB**, adică $\Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$, ştim că pentru a arăta că VB este corect față de o clasă de modele este suficient să arătăm că **VB** este validă în fiecare model în acea clasă, pentru că sistemul K este cunoscut (şi am demonstrat aceasta în primul capitol) a fi corect față de fiecare clasă de modele. Să ne reamintim acum structura generală a demonstrației noastre care arată că **VB** este validă în clasa $\mathcal{D}$ a modelelor-generale, fiecare model din acea clasă având codomeniul funcției sale de valorizare V restricționat la o mulțime G de judecăți admisibile: **VB** nu este validă în clasa $\mathcal{D}$ a modelelor-generale restricționate, numai dacă mulțimea mundană a literei-propoziție 'B' care figurează în **VB** nu este o membră a mulțimii G a judecăților admisibile; aceasta contrazice Corolarul 2.2 că în fiecare model în $\mathcal{D}$ mulțimea mundană a fiecărei fbf este o membră a mulțimii G (vezi pg. 70). Prin urmare, dacă restricționăm evaluarea lui **VB** la modelele care sunt membre ale lui $\mathcal{D}$, atunci formula **VB** este validă, şi prin urmare sistemul VB însuşi este corect față de clasa de modele $\mathcal{D}$.

În consecință, pentru a arăta că VB nu este corect față de clasa $\mathcal{D}^{iii}$ a modelelor-generale, trebuie să demonstrăm că există cel puțin un model $\mathcal{M}^{iii}$ **în** $\mathcal{D}^{iii}$, şi o lume w în $\mathcal{M}^{iii}$, în aşa fel încât $(\mathcal{M}^{iii}, w) \nvDash \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$.

Aşa cum am remarcat deja, analiza realizată mai înainte, care arată că (**MV**) $\Diamond\Box A \vee \Box A$ trebuie să aibă loc în fiecare model bazat pe $\mathcal{F}$ la fiecare lume în mulţimea $\{u, w_i\}_{i \in N}$ se aplică deopotrivă în cazul secvenţei **VB**, pentru aceleaşi motive. Astfel, w_0 este un drum înfundat şi în consecinţă '$\Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$' este adevărată la această lume, ceea ce face adevărată la w_0 şi formula '$\Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$'. Atunci, fiecare lume din mulţimea $\{u, w_i\}/w_0$, unde $i \in N$ şi $i \neq 0$, poate să vadă un drum înfundat, lucru care o face din nou adevărată pe '$\Diamond\Box A$' la fiecare lume de felul acesta, şi o face din nou adevărată pe '$\Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$' la fiecare lume din mulţimea $\{u, w_i\}/w_0$. Oricum, marea diferenţă aici este produsă de către valorile de adevăr pe care lumea v din cadrul $\mathcal{F}$ le atribuie lui 'A' şi lui 'B' din **VB**. Iar afirmaţia pe care o facem acum este că există un model-general $\mathcal{M}^{iii} = (W, R, G^{iii}, V)$ astfel încât $\mathcal{M}^{iii} \in \mathcal{D}^{iii}$, şi $\mathcal{M}^{iii}$ o respinge pe **VB**. Pentru ca modelul $\mathcal{M}^{iii}$ să realizeze acest lucru definim funcţia $V_{\mathcal{M}^{iii}}$ astfel: $V(A) = W - \{w_i\}_{i \in N}$, şi $V(B) = W - \{u, v\}$.

Într-adevăr, supoziţia că $(\mathcal{M}^{iii}, v) \not\models \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$ nu produce nici o inconsistenţă: disjuncţia poate fi falsificată într-un fel care păstrează totuşi mulţimea mundană a lui 'A' şi mulţimea mundană a lui 'B' ca membre ale lui G^{iii}. Astfel, din asumpţia că

(a) $(\mathcal{M}^{iii}, v) \not\models \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$

decurge că

(b) $(\mathcal{M}, v) \not\models \Diamond\Box A$

şi că

(c) $(\mathcal{M}, v) \not\models \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$.

Acum, (b) are loc într-un model $\mathcal{M}^{iii} = (W, R, G^{iii}, V)$ bazat pe $\mathcal{F}$, dacă $V_{\mathcal{M}^{iii}}(A) = W - \{w_i\}_{i \in N}$. Pentru că atunci, din moment ce 'A' este falsă la fiecare $w_i \in W$ şi Ruw_i, $(\mathcal{M}^{iii}, u) \not\models \Box A$, şi deoarece u este singura lume pe carè poate să o vadă lumea v, decurge că $(\mathcal{M}^{iii}, v) \not\models \Diamond\Box A$, aşa cum ne dorim. Mai mult, mulţimea mundană a lui 'A' aparţine lui G^{iii} pentru că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \models A\}$ este finită, adică mulţimea $\{u, v\}$ este finită, şi $w_k \notin \{u, v\}$.

(c) este de asemenea cazul în acelaşi model $\mathcal{M}^{iii} = (W, R, G^{iii}, V)$ bazat pe $\mathcal{F}$, dacă $V_{\mathcal{M}^{iii}}(B) = W - \{u, v\}$ sau $V_{\mathcal{M}^{iii}}(B) = W - \{u\}$, pentru că există o lume pe care v poate să o vadă, care o face falsă pe '$\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B$'. Deoarece u este singura lume pe care v poate să o vadă, aceasta înseamnă că u este *acea* lume, şi astfel,

(d) $(\mathcal{M}, u) \not\models \Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B$.

În consecinţă,

(e) $(\mathcal{M}, u) \models \sim(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$

de unde decurge

(f) $(\mathcal{M}, u) \models \Box(\Box B \rightarrow B)$ & $\sim B$

(astfel, u nu este o B-lume, adică $u \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \models B\}$).

Din (f) decurge că fiecare lume w_i pe care u poate să o vadă este în aşa fel încât

(g) $(\mathcal{M}, w_i) \models \Box B \rightarrow B$

şi deoarece w_0 este un drum înfundat, decurge mai întâi că

(h) $(\mathcal{M}, w_0) \models \Box B$

iar apoi, din (g) şi (h), decurge că

(i) $(\mathcal{M}, w_0) \vDash$ B.

Acum, unica lume pe care poate să o vadă w_1 este w_0, iar w_0 *este* o B-lume. Deci

(j) $(\mathcal{M}, w_1) \vDash \Box$B

şi din (g) şi (j) obţinem

(k) $(\mathcal{M}, w_1) \vDash$ B.

O reiterare a acestui raţionament ne dă rezultatul că pentru fiecare i

(l) $(\mathcal{M}, w_i) \vDash$ B

ceea ce înseamnă că $\{w_i\}_{i \in N} \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash B\}$.

Astfel, mulţimea mundană a lui 'B', adică $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash B\}$, este infinită, şi v poate să fie sau poate să nu fie una dintre membrele ei. Mulţimea mundană a lui 'B' are o complementară finită, anume sau $\{u\}$ sau $\{u, v\}$, depinzând de faptul dacă v aparţine sau nu acestei mulţimi, şi $w_k \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash B\}$. Prin urmare, tocmai am demonstrat că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash B\} \in G^{iii}$.

În consecinţă, din moment ce atât mulţimea mundană a lui 'A' cât şi mulţimea mundană a lui 'B' sunt membre ale mulţimii G^{iii} de judecăţi admisibile, modelul $\mathcal{M}^{iii}$ pe care-l construim aici *este* un membru al clasei $\mathcal{D}^{iii}$ de modele restricţionate, iar supoziţia că $\mathcal{M}^{iii}$ respinge pe **VB** nu conduce la nici o inconsistenţă. Prin urmare, **VB** nu este validă în clasa $\mathcal{D}^{iii}$ a modelelor şi astfel, sistemul VB nu este corect faţă de $\mathcal{D}^{iii}$. Acest rezultat este suficient pentru a elimina clasa G^{iii} a judecăţilor admisibile drept clasă alternativă dorită de care este nevoie într-o prezumtivă demonstraţie alternativă a incompletitudinii lui VB.

În fine, să arătăm repede de ce mulțimea

$G^{iv} = \{X \subset W: X$ este finită și $v \notin X$ sau comp(X) este finită și $v \in X\}$

nu poate nici ea să servească drept mulțime de judecăți admisibile în demonstrația noastră. Problema acestei mulțimi este aceea că ea nu sprijină primul caz al argumentului inductiv asupra lui $\Box$.

Astfel, să presupunem, ca de obicei, că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\} \in G^{iv}$, și să încercăm să arătăm că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \in G^{iv}$. Totuși, *Cazul 1* al acestui argument inductiv nu poate fi dus până la capăt, și de fapt $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \notin G^{iv}$.

Cazul 1: există cel puțin un i astfel încât $w_i \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$. Atunci, pentru fiecare $j > i$, dacă Rji atunci $w_j \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. Acum, pentru ca această demonstrație să poată fi dusă până la capăt, trebuie să arătăm că sau mulțimea mundană a lui $\Box\Phi$ este finită și v nu îi aparține, sau, altfel, complementara mulțimii mundane a lui $\Box\Phi$ este finită, și astfel mulțimea mundană a lui $\Box\Phi$ este infinită, și v aparține mulțimii mundane a lui $\Box\Phi$. Demonstrația nu poate fi produsă însă, deoarece nici una dintre condiții nu este satisfăcută. Cea de-a doua condiție eșuează într-un fel evident, deoarece în cazul considerat aici numai mulțimi finite de lumi din $W_{\mathcal{F}}$ pot fi membre ale mulțimii mundane a lui $\Box\Phi$.

Și prima condiție eșuează din următorul motiv:

Din rațiuni logice, la care se adaugă puțină teorie a mulțimilor, sau $u \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$ sau $u \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$. Putem demonstra că mulțimea mundană a lui $\Box\Phi$ nu aparține lui G^{iv}, pentru că apartenența mulțimii mundane a lui $\Box\Phi$ la G^{iv} nu poate fi inferată din fiecare disjunct, luat în mod separat, al acestei

disjuncții cu doi termeni. Deşi există o inferență a acestui fapt din cel de-al doilea disjunct, nu există nici o rută către acelaşi fapt pornind de la primul disjunct. Să asumăm pe cel de-al doilea disjunct, adică $u \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$. Atunci, din moment ce Rvu, $v \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. Astfel, din mulțimea de lumi $\{w_i\}_{i \in N}$ cel mult un număr ***finit*** de lumi $\{w_c\}_{c < i}$ sunt în aşa fel încât pentru fiecare $w \in \{w_c\}$, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$, şi $v \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. Prin urmare, dacă $u \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$, atunci mulțimea mundană a lui $\Box\Phi$ este finită şi v nu-i aparține.

Dar să presupunem acum că $u \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$. Atunci $v \in \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$, din moment ce u este singura lume pe care poate să o vadă v şi u aparține mulțimii mundane a lui Φ. Mai mult, din mulțimea de lumi $\{w_i\}_{i \in N}$ cel mult un număr ***finit*** de lumi $\{w_c\}_{c < i}$ sunt în aşa fel încât pentru fiecare $w \in \{w_c\}$, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\}$. În consecință, mulțimea mundană a lui $\Box\Phi$ este mulțimea reuniune $\{w_c\}_{c < i} \cup \{v\}$, care este finită, din moment ce atât $\{w_c\}_{c < i}$ cât şi $\{v\}$ sunt finite, şi $v \in \{w_c\}_{c < i} \cup \{v\}$ (u nu poate fi o membră a mulțimii mundane a lui $\Box\Phi$, din moment ce Ruw_i, iar parametrii *Cazului 1* sunt în aşa fel fixați încât $w_i \notin \{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\}$). Astfel, mulțimea mundană a lui $\Box\Phi$ este finită şi lumea v ***aparține*** acestei mulțimi. Prin urmare, nu decurge că $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \in G^{iv}$, dacă $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\} \in G^{iv}$, pentru că apartenența mulțimii mundane a lui $\Box\Phi$ la mulțimea G^{iv} nu decurge din asumarea celui de-al doilea disjunct al disjuncției cu doi membri cu care am început această demonstrație.

În conscință, în general în acest *Caz 1* nu există nici o demonstrație că dacă $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\} \in G^{iv}$ atunci $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \in G^{iv}$. Din moment ce

Cazul 1 este necesar în structura generală a demonstrației inductive pe care am încercat să o dăm aici, şi din moment ce această prezumtivă demonstrație a eşuat, conchidem că există cel puțin un caz în care deşi $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Phi\} \in G^{iv}$, totuşi $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box\Phi\} \notin G^{iv}$.

Singurul fel în care mulțimea G^{iv} a judecăților admisibile poate fi făcută să funcționeze într-o demonstrație a incompletitudinii lui VB cere o modificare a cadrului $\mathcal{F}$ care să producă un cadru $\mathcal{F}'$ care să fie izomorf cu cadrul $\mathcal{F}$. Astfel, dacă cadrul $\mathcal{F}$ suportă o operație de 're-etichetare' a unora dintre indicii săi, referitor la lumile u şi v în aşa fel încât v să fie noua etichetă a indicelui etichetat u în $\mathcal{F}$, şi u să fie noua etichetă a indicelui etichetat v în $\mathcal{F}$, atunci cadrul $\mathcal{F}'$ pe care-l generăm pe această cale este exct precum cadrul $\mathcal{F}$ cu excepția faptului că în acest nou cadru v joacă rolul pe care în primul cadru îl joacă u, iar u face treaba pe care v o face în $\mathcal{F}$. Astfel, noul aranjament este $\mathcal{F}' = (W, R')$, unde $W = \{u, v, w_0, w_1, w_2, ...\}$, adică o mulțime denumerabilă, care constă dintr-o colecție infinită de lumi $\{w_i\}_{i \in N}$ (N mulțimea numerelor naturale), şi din două alte lumi suplimentare u şi v; şi $R' = \{<u, v>, <v, w_i>, <w_j, w_i>\}$ pentru fiecare $i, j \in N$, astfel încât $i < j$.

Nu este greu să verificăm că mulțimea

$G^{iv} = \{X \subset W: X$ este finită şi $v \notin X$ sau comp(X) este finită şi $v \in X\}$

va juca acelaşi rol pe care-l joacă mulțimea G în demonstrația originală, **cu condiția ca** ceea ce utilizăm să fie un cadru, care în acest duplicat al demonstrației incompletitudinii lui VB, în care folosim această nouă mulțime G^{iv} de judecăți admisibile, este cadrul $\mathcal{F}'$.

Până aici, am considerat toate posibilitățile de modificare ale mulțimii G din demonstrația originală, într-un fel care să fie consistent cu demonstrarea faptului că

VB este incomplet. Am văzut că nici una dintre acestea nu poate să se deosebească drastic de mulțimea G. De fapt, am arătat că are loc un rezultat ceva mai tare, anume că o imagine a aranjamentului original pentru demonstrarea incompletitudinii lui VB trebuie să fie scufundată în oricare construcție de acest fel, care este potrivită pentru scopurile acestei demonstrații. Aceasta întărește ideea că oricare mulțime Γ de judecăți admisibile, care se deosebește de mulțimea originală G din demonstrația incompletitudinii lui VB, este utilizabilă într-un duplicat al demonstrației incompletitudinii lui VB dacă şi numai dacă structura (cadrul), cu care este folosită mulțimea Γ, are scufundate în ea atât o imagine a mulțimii originale G cât şi o imagine a cadrului recesiv original $\mathcal{F}$.

Ceea ce emerge din această lungă discuție şi analiză a tuturor cazurilor legate de cea de-a doua parte a demonstrației de incompletiudine a lui VB este o morală mai generală, asupra căreia vreau să atrag atenția la sfârşitul acestui capitol. După câte pot să-mi dau seama, această morală corespunde foarte bine intenției structurii generale a argumentului meu, pe care l-am dezvoltat în aceste pagini. Iat-o: dacă nu se foloseşte o clasă de modele bazate pe un cadru-general, nu există nici o metodă *semantică* prin care să se poată arăta că o anumită formulă care este validă în clasa tuturor cadrelor pentru un anumit sistem dat este cu toate acestea independentă față de toate tezele acelui sistem, ceea ce face ca sistemul să fie incomplet. Aşadar, folosirea unui cadru-general este necesară în structura globală a demonstrației de incompletitudine. Nici o clasă de cadre-Kripke nu ne va fi de folos aici în demonstrația pe care urmărim să o construim. În mod tipic, pentru o demonstrație de incompletitudine în logica modală, clasa de cadre-Kripke este necesară pentru a arăta că o anumită formulă, care aparține unui anumit sistem, este validă în aceeaşi clasă a tuturor cadrelor-Kripke în care toate tezele acelui sistem (incomplet) sunt valide. Atunci, nu se poate folosi

aceeaşi clasă de cadre-Kripke pentru a arăta că *acea* formulă nu are o proprietate semantică, pe care fiecare teză a sistemului incomplet o are. Deoarece nu există nimic mai bun disponibil pentru a juca rolul de proprietate semantică prin care formulele sunt 'legate' de cadre, decât proprietatea unei formule de a fi validă într-o anumită clasă de interpretări specificate. Astfel, pentru a putea să concepem o astfel de proprietate care să arate că formula în chestiune nu este o teoremă a sistemului modal incomplet, chiar dacă formula este validă în toate acele cadre în care toate tezele sistemului sunt valide, avem nevoie de un alt gen de structură, în care toate tezele sistemului incomplet să fie valide, în timp ce formula în chestiune, şi toate instanţele ei substituţie, să nu fie valide. În acest scop sunt necesare - şi intervin în demonstraţia noastră - structura denumită 'cadru-general' şi clasa de modele care se bazează pe acest cadru.

Atunci, o altă chestiune care ne vine în mod firesc în minte este dacă problema incompletitudinii modale nu este afectată, dacă ceea ce înţelegem acum prin caracterizarea unui sistem normal este aceea că sistemul este corect şi complet faţă de o clasă de cadre-*generale*. Mai exact, întrebarea devine: este distincţia dintre sisteme modale complete şi incomplete autentică, dacă ceea ce înţelegem acum prin formulă validă este adevărul acelei formule în fiecare lume în fiecare model care este bazat pe un cadru-general într-o clasă de astfel de cadre-generale? Răspunsul la această întrebare este că fiecare sistem normal se dovedeşte a fi complet, dacă prin validitate înţelegem validitate într-o clasă de cadre-generale.

Pentru o schiţă a acestei demonstraţii că fiecare sistem modal normal este caracterizat de către o clasă de cadre-generale, să considerăm mai întâi modelul canonic al unui sistem modal normal arbitrar S. Să luăm cadrul (W, R) al modelului canonic al lui S şi să definim acum mulţimea G a judecăţilor admisibile în W, ca fiind acea mulţime de submulţimi de lumi din W astfel încât există cel puţin o propoziţie σ

a cărei mulțime mundană este exact o membră a lui G. În mod formal, $G = \{X \subseteq W: (\exists\sigma)(\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \sigma\} = X)\}$. Afirmația pe care o facem acum este: dacă cadrul-general $\mathcal{G} = (W, R, G)$ este generat prin adăugarea mulțimii G, definită ca mai înainte, la cadrul (W, R) al modelului canonic al lui S, atunci cadrul-general $\mathcal{G}$ va caracteriza pe S. Şi din moment ce S este un sistem arbitrar, rezultatul pe care l-am obținut este că *fiecare* sistem normal este caracterizat de către clasa cadrelor-generale pentru acel sistem. Şi într-adevăr, ar fi suficient ca S să fie caracterizat de către mulțimea unitate, alcătuită din cadrul-general, generat în felul arătat înainte pe baza cadrului modelului canonic al lui S, plus mulțimea tuturor mulțimilor mundane ale fiecărei mulțimi S-consistente de propoziții.

Nu este dificil să sesizăm temeiurile acestei afirmații. Mai întâi, S este corect față de mulțimea unitate $\mathcal{G}$, adică fiecare secvență S-derivabilă este $\mathcal{G}$-validă. Adăugarea lui G la cadrul-Kripke al modelului canonic al lui S are efectul că pentru fiecare S-secvență există o mulțime în G, care este mulțimea mundană a acelei secvențe. Deci, fiecare cadru-general astfel generat din cadrul-Kripke al modelului canonic al lui S va fi un cadru-general **pentru** S, ceea ce înseamnă că S este corect față de acel cadru general. Mai mult, chiar sisteme incomplete într-un sens absolut, adică sisteme incomplete față de orice clasă de cadre-Kripke, sunt totuşi corecte față de o anumită clasă de cadre-Kripke. Problema pe care o ridică acele sisteme este că ele nu sunt complete față de nici o clasă de cadre-Kripke față de care ele *sunt* corecte.

Aşadar, aspectul central al cazului pe care-l considerăm aici, anume rezultate de caracterizare în cadre-generale, este acela de a arăta că fiecare sistem normal corect față de o clasă de cadre-generale va fi, de asemenea, complet față de acea clasă de cadre-generale. Nu este foarte greu să observăm că teorema lui Henkin este valabilă pentru fiecare sistem normal S, dacă ceea ce înțelegem acum în demonstrație prin

'cadru' este 'cadru-general'. Astfel, pentru fiecare mulțime *S*-consistentă de propoziții Σ există un model verificator în mulțimea *G*. Este suficient să stipulăm că σ este conjuncția tuturor propozițiilor dintr-o mulțime *S*-consistentă de propoziții. Atunci σ trebuie să aibă o mulțime mundană în mulțimea *G* a judecăților admisibile. Din moment ce mulțimea *S*-consistentă de propoziții a fost aleasă în mod arbitrar, fiecare astfel de mulțime trebuie să aibă un model, care este mulțimea ei mundană, în mulțimea *G*. Prin urmare, fiecare mulțime *S*-consistentă de propoziții este verificabilă de către o mulțime sau alta din *G*. În consecință, fiecare sistem normal va fi caracterizat de către cadrul-general, construit pe cadrul modelului său canonic, prin adăugarea mulțimii *G* a judecăților admisibile, mulțime definită în felul arătat mai înainte. Astfel, *S* va fi complet într-un sens absolut şi din moment ce *S* este un sistem arbitrar, aceasta înseamnă că fiecare sistem normal este complet, dacă prin formulă validă a lui *S* înțelegem formulă validă în clasa *cadrelor generale* față de care *S* este corect.

Pentru a rezuma una dintre temele directoare ale acestui capitol, voi prezenta următorul tabel, care este construit pentru a servi ca un ghid pentru corelația dintre *completitudinea/incompletitudinea* unui sistem modal normal şi noțiunea de *formulă modală validă* care este adoptată. Acest ghid indică faptul că proprietatea incompletitudinii se aplică unui sistem modal normal, dacă se aplică în general, numai dacă ceea ce se înțelege prin validitate este validitatea într-o clasă de cadre-Kripke.

Este S un sistem modal normal?	***Fiecare** astfel de sistem S este complet*	*... numai dacă **VALIDITATE** înseamnă*
DA	DA	Validitate în clasa tuturor modelelor pentru *S*
DA	DA	Validitate în clasa ***cadrelor-generale*** față de care *S* este corect
DA	Există sisteme modale normale incomplete *S*	*... și **VALIDITATE** înseamnă*
	DA	Validitate în clasa ***cadrelor-Kripke*** față de care *S* este corect

În capitolul următor vom explica acest fenomen modal al incompletitudinii semantice. Se va dovedi că departe de a fi un puzzle curios şi nesemnificativ, lipsit de orice interes teoretic, incompletitudinea modală este foarte bine oglindită de către un fenomen similar, şi poate mai profund şi fundamental, care apare în logica non-modală de ordinul al doilea şi care este legat de puterea expresivă a limbajelor de ordinul al doilea. Şi după cum vom putea vedea, distincția modală completitudine/incompletitudine, care este generată de considerarea relației dintre anumite sisteme şi oricare clasă de cadre-Kripke, față de care aceste sisteme sunt corecte, şi care depinde, de asemenea, de cardinalitatea mulțimilor de judecăți admisibile, are un omolog în logica de ordinul al doilea. Întrucât, dacă sistemele de ordinul al doilea sunt sau nu sunt complete/incomplete se va dovedi a depinde în mod crucial de tipul de interpretare care este specificat pentru ele: sau o interpretare care nu este restricționată la o submulțime proprie a întregii mulțimi a tuturor

submulțimilor formate din elementele luate din domeniul D al interpretării, sau, altfel, o interpretare care este restricționată în felul acesta. În primul caz, acel sistem corect de ordinul al doilea este cu necesitate incomplet față de oricare interpretare care-l face corect, în timp ce în cel de-al doilea caz, sistemul va fi complet.

Capitolul 3. Incompletitudinea modală ca fenomen de ordinul al doilea

Acest capitol dă o explicație în logica de ordinul al doilea existenței sistemelor modale propoziționale incomplete. În acest scop, mai întâi voi face un sinopsis al semanticii şi teoriei demonstrației pentru logica de ordinul al doilea, în măsura în care acestea sunt relevante pentru problema discutată aici. Principalul rezultat care este vizat este incompletitudinea oricărui sistem de deducție naturală de ordinul al doilea, care este corect față de interpretarea (semantica) standard a limbajului acelui sistem. Se va arăta, totodată, că dacă semantica de ordinul al doilea pentru limbajul unui sistem de deducție naturală este non-standard (semantica Henkin), atunci caracteristica incompletitudinii dispare şi există sisteme de deducție naturală corecte care sunt complete față de acea interpretare non-standard.

Voi desfăşura apoi principalul argument pentru conceptul incompletitudinii modale ca fenomen de ordinul al doilea. Principala teză a argumentului este că forța expresiei cuantificaționale '***fiecare model*** bazat pe un cadru', care apare în definiția validității modale (a unei mulțimi de formule) într-o clasă de cadre, este aceea a unui cuantor universal de ordinul al doilea. Mai precis, o formulă modală va conta ca formulă validă într-o clasă de cadre, dacă formula devine adevărată pentru *fiecare atribuire de mulțimi de lumi* din domeniul W al interpretării, *pentru fiecare literă-propoziție* care apare în formulă. Expresia tocmai italicizată conține expresia cuantificațională '*fiecare atribuire de mulțimi de lumi*', care este un cuantor de

ordinul al doilea al cărui domeniu este mulțimea tuturor submulțimilor de lumi w luate din domeniul W al interpretării.

Distincția care poate fi trasată în logica de ordinul al doilea între sisteme de deducție naturală corecte complete şi respectiv incomplete reflectă distincția corespunzătoare dintre semanticile standard şi respecctiv non-standard pentru limbaje de ordinul al doilea. Prima distincție oglindeşte foarte bine, şi, după cum cred eu, ea este principala rațiune a distincției modale corespunzătoare dintre bine-cunoscutele sisteme modale propoziționale corecte şi complete, precum K, T, S4, B, sau S5, şi sistemele modale propoziționale corecte şi *in*complete, precum sistemul VB din capitolul precedent. Ceea ce corespunde în logica modală interpretărilor de ordinul al doilea standard sunt cadrele şi/sau modelele-Kripke, în timp ce interpretărilor de ordinul al doilea non-standard le corespund cadrele şi/sau modelele-generale. Un cadru-Kripke este pentru un limbaj modal ceea ce o interpretare de ordinul al doilea standard este pentru un limbaj de ordinul al doilea, iar un cadru-general este pentru un limbaj modal ceea ce o interpretare non-standard (Henkin) este pentru un limbaj de ordinul al doilea.

Prin această analogie urmăresc să exploatez în scopuri explicative caracteristicile esențiale ale următoarei situații: dacă conceptul de interpretare modală cu care lucrăm este acela al unei clase de cadre-generale, există sisteme modale normale corecte care sunt complete față de o clasă anumită de cadre-generale (în mod tipic, față de o clasă de cadre a cărei relație de accesibilitate satisface anumite condiții structurale care determină corectitudinea sistemului). Omologul de ordinul al doilea al acestui rezultat modal este că ori de câte ori interpretarea de ordinul al doilea este o interpretare non-standard (interpretare Henkin) pentru limbajul de ordinul al doilea al unui sistem de deducție naturală corect, vor exista sisteme care sunt, de asemenea,

complete. Pe de altă parte, dacă interpretarea modală este construită prin cadre-Kripke, atunci distincția dintre sisteme normale complete şi incomplete este o distincție autentică. Totodată, pe linia logicii de ordinul al doilea, dacă interpretarea de ordinul al doilea pentru limbajul de ordinul al doilea al unui sistem de deducție naturală este o interpretare standard, atunci fiecare astfel de sistem de deducție naturală pentru o logică de ordinul al doilea va fi incomplet.

Prin urmare, analogia încetează exact în punctul în care, în cazul modal, avem fie sisteme normale corecte complete fie sisteme normale corecte incomplete, dacă interpretarea semantică este asigurată prin cadre-Kripke corespunzătoare, în timp ce în cazul logicii de ordinul al doilea ***fiecare*** sistem demonstrativ de ordinul al doilea, care este corect față de interpretarea de ordinul al doilea standard, este în mod necesar incomplet față de aceeaşi interpretare. Aşadar, în logica de ordinul al doilea standard nu există nici un analog pentru cazul completitudinii modale, deoarece nu există nici un sistem de ordinul al doilea corect față de interpretarea de ordinul al doilea standard, care să fie, de asemenea, complet. Deci, o problemă de rezolvat pentru explicația pe care o construiesc aici pentru incompletitudinea modală prin intermediul incompletitudinii de ordinul al doilea este aceea a conferirii unui sens şi faptului că există sisteme modale ***complete***, alături de acelea care sunt incomplete.

Iată în continuare o schiță a argumentului pe care-l voi dezvolta mai departe şi care mizează pe noțiunea că reducerea sistemelor modale la sisteme de ordinul al doilea este totuşi eficientă pentru înțelegerea incompletitudinii modale, chiar dacă aceeaşi procedură recursivă pentru reducerea sistemelor modale la sisteme de ordinul al doilea poate fi aplicată, de asemenea, sistemelor modale ***complete***, care vor fi puse şi ele în corespondență cu structuri de ordinul al doilea. Astfel, când se spune că logica de ordinul al doilea este incompletă, ceea ce avem în minte, în primul rând, este

că nu există nici un sistem deductiv de ordinul al doilea care să fie deopotrivă corect şi *complet* faţă de semantica standard pentru logica de ordinul al doilea. Acum, ceea ce ne-am putea aştepta să descoperim în cazul traducerii sistemelor modale ***complete*** în omoloagele lor de ordinul al doilea este ceva de felul următor: după ce traducem axiomele şi regulile de transformare ale unui sistem modal de felul acesta în notaţiile logice de ordinul al doilea corespunzătoare celor modale şi simulăm sistemul modal complet în omologul său de ordinul al doilea, **completitudinea** acelui sistem modal revine la faptul că ***toate*** propoziţiile de ordinul al doilea care sunt ***consecinţe semantice*** ale omoloagelor de ordinul al doilea ale axiomelor acelui sistem modal sunt ***exact*** omoloagele de ordinul al doilea ale propoziţiilor modale care sunt ***consecinţele deductive*** în acel sistem modal complet, adică, altfel spus, sunt ***exact*** omoloagele de ordinul al doilea ale teoremelor acelui sistem modal complet. Vorbind într-un fel aproximativ, orice poate fi inferat într-un sistem logic de ordinul al doilea din traducerile de ordinul al doilea ale axiomelor unui sistem modal complet, folosind omoloagele de ordinul al doilea ale regulilor de transformare ale acelui sistem modal, este o omoloagă a unei teoreme a acelui sistem modal complet.

Pe de altă parte, în cazul unui sistem modal ***incomplet*** situaţia care se obţine este, în mare vorbind, de felul următor: începem cu traducerile de ordinul al doilea ale axiomelor şi regulilor de transformare ale unui sistem modal incomplet. ***Incompletitudinea*** sistemului va consta, atunci, în existenţa unor ***consecinţe logice*** (***semantice***) ale omoloagelor de ordinul al doilea ale axiomelor modale, care pot fi inferate folosind omoloage de ordinul al doilea ale regulilor modale de transformare, dar care sunt de aşa natură încât ele nu sunt omoloage ale nici unei ***teoreme modale*** ale acelui sistem modal incomplet. Prin urmare, există o propoziţie de ordinul al doilea, care este traducerea unei anumite propoziţii modale, în acord cu scheme

recursive de traducere din limbajul acelui sistem modal în limbajul unui sistem de ordinul al doilea, şi care este ***validă*** în clasa structurilor de ordinul al doilea, structuri care sunt omoloagele cadrelor în raport cu care sistemul modal incomplet este *corect*, şi care propoziţie este de aşa fel încât omoloaga sa modală ***nu este derivablă*** în acel sistem modal incomplet. În consecinţă, acel sistem modal nu este complet faţă de clasa cadrelor ***pentru*** acel sistem, cu alte cuvinte, faţă de acea clasă de cadre faţă de care sistemul este *corect*. Astfel, sistemul nu este caracterizabil şi este incomplet într-un sens absolut.

O schiţă a logicii de ordinul al doilea

Pentru scopurile noastre de aici, anume acelea de a da o explicaţie bazată pe logica de ordinul al doilea fenomenului incompletitudinii din logica modală, este momentul acum să prezentăm o schiţă a logicii de ordinul al doilea.[1] Istoria reală a logicii matematice moderne a fost motivată şi modelată, în prmul rând, de către nevoia de a înţelege structura raţionamentelor aplicate conceptelor matematice. Deoarece studiul acesta poate fi realizat în mod potrivit în logicile de ordin superior, logica de ordinul al doilea, fiind una dintre aceste logici, este mai aptă decât logica de ordinul întâi să trateze probleme logice care sunt generate de către practica matematică. Totuşi, există deosebiri importante între logica de ordinul întâi şi logica de ordinul al doilea în privinţa semanticii şi a teoriei demonstraţiei. Aceste aspecte

[1] Pentru această schiţă a logicii de ordinul al doilea, cf. Boolos, George şi Jeffrey, Richard *Computability and Logic*. Ediţia a treia, Cambridge University Press, 1989, capitolul 18, pg. 197-206; Forbes, Graeme *An Introduction to Modal Logic*, Tulane University, 1994; Manzano, Maria *Extensions of First Order Logic*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 19, Cambridge University Press, 1996; Shapiro, Stewart 'Second-Order Logic, Foundations, and Rules', *The Journal of Philosophy*, vol. LXXXVII, numărul 5, 1990, pg. 234-261; Shapiro, Stewart *Foundations Without Foundationalism. A Case for Second Order Logic*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

prin care se deosebesc cele două tipuri de logici fac să pară că logica de ordinul al doilea este mai puțin 'manipulabilă' decât logica de ordinul întâi. Astfel, pentru a menționa numai cele mai relevante aspecte care motivează opinia larg răspândită că logica de ordinul întâi este mai inteligibilă atât din punct de vedere tehnic cât şi filosofic decât logica de ordinul al doilea, iată o listă a acelor fapte care fac ca această diferență să apară ca fiind dramatică.

(1) Logica de ordinul al doilea este incompletă, sau mai precis, oricare colecție de reguli de inferență pentru o logică de ordinul al doilea care sunt corecte față de interpretarea de ordinul al doilea ***standard*** pentru limbajul acelei logici este în mod necesar incompletă față de clasa formulelor valide, a căror validitate este determinată de către aceeaşi interpretare standard de ordinul al doilea. Ca să formulăm aceeaşi idee cu alte cuvinte, nu există nici un test efectiv pentru validitatea propozițiilor de ordinul al doilea.

(2) Teorema compactității nu este valabilă în logica de ordinul al doilea, pentru că există o mulțime de propoziții care este enumerabilă şi nerealizabilă, astfel încât fiecare submulțime finită a acestei mulțimi este realizabilă şi una dintre acele propoziții este o propoziție de ordinul al doilea.

(3) Teorema Löwenheim-Skolem nu este valabilă: există o propoziție de ordinul al doilea ale cărei modele sunt ***exact*** acele interpretări care au domenii non-enumerable.

(4) Nu există nici un model non-standard pentru aritmetica de ordinul al doilea, aritmetică al cărei limbaj este obținut prin adăugarea unui vocabular non-logic specific limbajului logicii de ordinul al doilea. Altfel spus, oricare interpretare pentru limbajul aritmeticii de ordinul al doilea este un model al lui dacă şi numai dacă interpretarea este izomorfă cu modelul standard $\mathcal{N}$.

(5) Există o propoziție de ordinul al doilea ale cărei consecințe (de ordinul întâi şi de ordinul al doilea) în L sunt exact propozițiile adevărate în $\mathcal{N}$.

(6) Teorema lui Tarski a nedefinibilității adevărului nu este valabilă în logica de ordinul al doilea. Adevărul aritmetic este definibil în logica de ordinul al doilea, deoarece există o formulă de ordinul al doilea care este adevărată în $\mathcal{N}$ despre ***exact*** numerele Gödel ale propozițiilor de ordinul întâi adevărate în $\mathcal{N}$.

Se poate observa că au existat multe temeiuri tehnice pentru a adopta, în mod tradițional, punctul de vedere că logica de ordinul întâi este mai tratabilă decât logica de ordinul al doilea. (Temeiurile filosofice vor fi discutate în capitolul următor.) Drept urmare, în măsura în care logica de ordinul al doilea a fost folosită în vreun fel, în mod deosebit în studiile fundaționale din matematică, ea a fost considerată de obicei o *extindere* a logicii de ordinul întâi. Din acest punct de vedere, aproape că nimeni nu considera că logica de ordinul întâi este un 'caz limită' pentru logica de ordinul al doilea. Şi exact acesta ar fi putut să fie gândul care să apară cu claritate oricui ajungea şă-şi dea seama că motivația reală pentru a face logică matematică este studiul conceptelor şi al principiilor utilizate în matematică, studiu pentru care logica de ordinul al doilea şi nu cea de ordinul întâi este instrumentul mai potrivit.

În consecință, dacă concepem logica de ordinul al doilea ca pe o extindere a logicii de ordinul întâi, trebuie să pornim de la limbajul logicii de ordinul întâi şi de la o interpretare a acestuia şi apoi să adăugăm elementele de care este nevoie pentru a obține o logică de ordinul al doilea. De fapt, în logica de ordinul al doilea standard, sau 'reală', nu se va produce nici o modificare, nici a noțiunii de limbaj şi nici a aceleia de interpretare, exceptând faptul că vom avea nevoie de noi clauze de evaluare pentru propozițiile cuantificate de ordinul al doilea. Astfel, un limbaj este tot ceea ce se ştie că este un limbaj în logica de ordinul întâi, anume o mulțime enumerabilă de

simboluri non-logice. De asemenea, o interpretare pentru limbajul logicii de ordinul al doilea este același gen de structură ca și în logica de ordinul întâi.

Se poate obține un limbaj de ordinul al doilea, dacă se lărgesc conceptele de formulă și de propoziție care se folosesc în logica de ordinul întâi. Pentru a face aceasta, trebuie să operăm o schimbare și să adăugăm lexiconului logicii de ordinul întâi unele mulțimi noi de variabile. Schimbarea afectează mulțimea *literelor* predicat *n*-adice, care urmează a fi interpretate în logica de ordinul al doilea drept *constante* predicat *n*-adice. Această schimbare mai poate fi gândită, de asemenea, drept o extindere a categoriei de nume, deoarece în logica de ordinul al doilea, la constantele individuale, care sunt folosite ca nume ale obiectelor individuale în limbajul logicii de ordinul întâi, se adaugă constante predicat, care sunt folosite ca nume ale proprietăților și relațiilor. Pentru a ilustra acest punct, putem considera constanta predicat diadică 'R', sau 'Acc' (abreviere pentru 'accesibilitate'). Această constantă va fi folosită în traducerea canonică a limbajului logicii modale a propozițiilor într-un limbaj care este esențialmente unul de ordinul al doilea. Această constantă va denumi relația binară de accesibilitate de la o lume la altă lume. Un alt exemplu mai familiar este constanta predicat diadică '$\in$' din limbajul teoriei mulțimilor, care numește relația binară de apartenență.

Lexiconul limbajului logicii de ordinul al doilea

Ca urmare a adăugării unor mulțimi noi de *variabile* de ordinul al doilea la limbajul logicii de ordinul întâi, mai multe expresii vor fi considerate drept formule și propoziții. Există trei genuri noi de variabile: (i) o mulțime de *variabile* **funcționale** n-adice, (ii) o mulțime de *variabile* **propoziționale**, și (iii) o mulțime de *variabile*

predicat n-adice,[2] pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. Toate variabilele din mulțimile enumerate aici urmează a fi adăugate la mulțimea *simbolurilor* funcționale, la mulțimea *literelor*-propoziție și respectiv la mulțimea *literelor*-predicat n-adice, care aparțin limbajului logicii de ordinul întâi. De obicei, un superscript va indica *gradul*, sau numărul de locuri pentru obiectele corespunzătoare fiecărei variabile de ordinul al doilea. Astfel, simbolurile 'X^1', 'X^2', 'f^1', și 'f^2' stau pentru o variabilă-predicat monadică, o variabilă-relație binară, o variabilă-funcție unară și respectiv pentru o variabilă-funcție binară.

Putem căuta o simplificare a acestui limbaj, deoarece nu toate elementele la care ne-am referit aici vor avea importanță teoretică în explicația căreia îi este consacrat acest capitol. Astfel, ne putem dispensa de mulțimea *variabilelor*-**funcție** n-adice, deoarece o modalitate alternativă de a introduce limbajul logicii de ordinul al doilea, fără nici o pierdere de generalitate, ar fi aceea de a introduce numai *variabile*-**relație** de oricare *grad*, și apoi de a lăsa ca fiecare variabilă-relație $n+1$-adică să servească drept surogat pentru variabile-funcție n-adice: dacă F^{n+1} este oricare astfel de variabilă-relație, atunci propoziția deschisă

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\exists!y)Fx_1\ldots x_ny$$

indică faptul că F poate fi făcut să servească drept "reprezentant" pentru o variabilă-funcție n-adică, f^n.

[2] Distincția dintre litere predicat și variabile predicat se va dovedi a fi mai mult decât o simplă chestiune de subtilitate sintactică. Așa cum se va vedea în capitolul 4, afirmațiile lui Quine împotriva logicii de ordinul al doilea se bizuie masiv pe caracterul neadecvat al interpretării literelor predicat schematice drept variabile predicat.

Babeș-Bolyai Cluj-Napoca Universitatea

Sintaxa limbajului logicii de ordinul al doilea

Sintaxa limbajului logicii de ordinul al doilea o extinde pe aceea a limbajului logicii de ordinul întâi. Altfel spus, definiția inductivă a formulelor bine formate (fbf-uri pe scurt) din logica de ordinul întâi este îmbogățită cu unele clauze noi, care sunt concepute pentru a face loc noilor itemi din lexiconul logicii de ordinul al doilea. Mai întâi, extindem noțiunea de *termen* (să ne reamintim că în logica de ordinul întâi, printr-un *termen* înțelegem sau o variabilă-individ, sau o constantă-individ, sau un simbol-funcție n-adic urmat de n variabile sau constante) astfel încât în logica de ordinul al doilea termen înseamnă următorul lucru:

(*termen* 2) Dacă f^n este o *variabilă-funcție* n-adică și $t_1,\ldots,t_n$ este un șir de n termeni, atunci $f(t_1,\ldots,t_n)$ este un termen.

Apoi, pentru a permite noilor itemi din lexiconul logicii de ordinul al doilea să apară în formule, extindem, de asemenea, noțiunea de formulă: *variabilele-funcție, variabilele-propoziție* și *variabilele-predicat* pot să apară în acele poziții în formule, unde în formulele de ordinul întâi li se permite se apară numai simbolurilor-funcție, literelor-propoziție și respectiv literelor-predicat. Facem, de asemenea, loc noilor genuri de variabile în domeniul de cuantificare al cuantorilor (de ordinul al doilea) '$\forall^2$' și '$\exists^2$'. (Ne vom dispensa, însă, de superscriptul '^{2}' ori de câte ori contextul face clar că este vorba de cuantori de ordinul al doilea.)

Astfel, clauza de ordinul întâi care stabilește pentru oricare literă-predicat n-adică λ și n termeni $t_1,\ldots,t_n$, că $\lambda t_1,\ldots,t_n$ este o fbf trebuie modificată pentru a face

loc atât *numelor*-predicat *n*-adice, cât şi *variabilelor*-predicat. În mod corespunzător, clauza (*f-at*) pentru sintaxa limbajului logicii de ordinul al doilea va avea conținutul:

(*f-at2*) pentru fiecare nume-predicat *n*-adic R^n şi fiecare variabilă-predicat *n*-adică X^n şi *n* termeni $t_1,\ldots,t_n$, atât $Rt_1,\ldots,t_n$ cât şi $Xt_1,\ldots,t_n$ sunt fbf-uri. (Un *termen* este sau o variabilă-individ, sau o constantă-individ.)

Clauza (*f-q*) pentru cuantorii de ordinul întâi trebuie redenumită (*f-q1*). Şi o nouă clauză (*f-q2*) trebuie adăugată pentru cuantorii de ordinul al doilea:

(*f-q2*): Dacă Φf^n este o fbf deschisă cu toate ocurențele variabilei-funcție *n*-adice f^n libere, Φp este o fbf deschisă cu toate ocurențele variabilei-propoziție *p* libere, şi ΦX^n este o fbf deschisă cu toate ocurențele variabilei-predicat *n*-adice X^n libere, atunci $\ulcorner(\forall f^n)\Phi f^n\urcorner$, $\ulcorner(\forall p)\Phi p\urcorner$, $\ulcorner(\forall X^n)\Phi X^n\urcorner$ şi $\ulcorner(\exists f^n)\Phi f^n\urcorner$, $\ulcorner(\exists p)\Phi p\urcorner$, şi respectiv $\ulcorner(\exists X^n)\Phi X^n\urcorner$, sunt toate fbf-uri.

Definiția pentru 'ocurențe libere' şi 'ocurențe legate' pentru genurile noi de variabile rămâne aceeaşi precum în cazul logicii de ordinul întâi. Ca întotdeauna, propozițiile sunt formule în care nici o variabilă (-individ, -funcție, -propoziție, sau -predicat) nu are apariție liberă. O formulă de ordinul al doilea va fi o formulă în care apare cel puțin o variabilă-funcție (-propoziție, sau -predicat), iar o propoziție de ordinul al doilea, desigur, va fi o formulă de ordinul al doilea cu nici o ocurență a vreunei variabile libere.

Efectul global al acestei sintaxe este, în mod evident, acela de a permite cuantificarea proprietăților şi relațiilor. Mai mult, aceasta este caracteristica definitorie a limbajului logicii de ordinul al doilea, spre deosebire de limbajul logicii de ordinul întâi, în care este permisă numai cuantificarea asupra indivizilor. Astfel, pentru a lua un exemplu foarte simplu, propoziția 'Fiecare obiect are cel puțin o proprietate' nu poate fi simbolizată, dacă nu se foloseşte limbajul logicii de ordinul al

doilea, iar într-un astfel de limbaj o putem simboliza prin '$(\forall x)(\exists F)Fx$'. (Este evident că logica de ordinul al doilea are o putere expresivă care este inaccesibilă logicii de ordinul întâi.)

Semantici pentru limbajul logicii de ordinul al doilea

În mod fundamental, conceptul de interpretare în logica de ordinul al doilea este similar aceluia din logica de ordinul întâi. Pentru scopul principalului argument din acest capitol, voi prezenta două genuri distincte de interpretare pentru limbajul logicii de ordinul al doilea: interpretarea ***standard*** pentru logica de ordinul al doilea 'reală' şi apoi interpretarea Henkin (sau generală) pentru logica de ordinul al doilea. Se va dovedi că logica de ordinul al doilea diverge drastic față de logica de ordinul întâi, numai în măsura în care interpretarea cu care operăm este interpretarea standard. În timp ce, dacă interpretarea pe care o construim pentru limbajul logicii de ordinul al doilea este interpretarea Henkin, atunci în acest caz multe rezultate importante din logica de ordinul întâi se conservă. În particular, suntem interesați în primul rând în a arăta că fiecare colecție de reguli de ordinul al doilea corecte este în mod necesar incompletă față de interpretarea standard. Totuşi, acest caz nu se produce atunci când trecem la o interpretare Henkin, deoarece există cel puțin o colecție de reguli de ordinul al doilea corecte, care este completă față de această interpretare din urmă.

Voi schița acum două sisteme semantice model-teoretice distincte pentru logica de ordinul al doilea, şi anume semantica standard şi semantica Henkin (generală). În general, un *model standard* pentru limbajul logicii de ordinul al doilea este exact precum o structură (model) de ordinul întâi, în care domeniul de discurs al cuantorilor de ordinul al doilea, sau în mod alternativ domeniul de obiecte asignabile

variabilelor-predicat, sunt *toate* submulțimile, relațiile, ș. a. m. d. ale domeniului de indivizi ai acelei interpretări. Contrar conceptului modelului standard, într-un model Henkin (general), domeniul cuantorilor de ordinul al doilea este restricționat la anumite mulțimi de submulțimi, relații, ș. a. m. d. luate din domeniul interpretării, care sunt semnalate de la început drept domeniul intenționat la care sunt relativizați acei cuantori. De fapt, aceasta revine la a aborda logica de ordinul al doilea ca pe o logică *multi-sortată*, în al cărei limbaj există sorturi pentru indivizi, predicate monadice, predicate diadice, etc. În acest caz din urmă, ceea ce se obține este o variantă notațională a logicii de ordinul întâi și nu este surprinzător că atunci când este abordată în felul acesta, logica de ordinul al doilea este tratabilă prin aceleași metode ale logicii de ordinul întâi, ceea ce va produce rezultatele metalogice atât de familiare din logica de ordinul întâi. Astfel, având în vedere diferențele substanțiale dintre logica de ordinul întâi și logica de ordinul al doilea, merită să facem observația că lista de itemi de la paginile 114-115 este o caracterizare a logicii de ordinul al doilea doar în cazul în care semantica pentru limbajul acelei logici este semantica standard. Nici una dintre diferențele din această listă între logica de ordinul întâi și logica de ordinul al doilea nu apare, însă, dacă lucrăm în schimb cu semantica Henkin.

Să adăugăm dintru început o lămurire generală a concepției subiacente despre proprietăți și relații. Deoarece trăsătura distinctivă a limbajelor de ordinul al doilea este cuantificarea asupra variabilelor-predicat n-adice, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$,[3] în toată expunerea mea, voi lua ca fiind de la sine înțeleasă concepția extensională standard despre proprietate ca fiind acel gen de entitate care este identificată cu o mulțime de obiecte care instanțiază acea proprietate. Așadar, în logica de ordinul al doilea, o proprietate este doar o submulțime a domeniului interpretării de ordinul al doilea. De

[3] În continuare, voi ignora variabilele-propoziție, pentru că ele nu joacă nici un rol în explicația pe care o construiesc aici.

asemenea, o relație binară este o submulțime de perechi de obiecte luate din domeniu, ș. a. m. d.

Semantica standard pentru limbajul logicii de ordinul al doilea

Un model standard pentru un limbaj al logicii de ordinul al doilea este, în mod fundamental, același gen de structură precum un model pentru un limbaj de ordinul întâi, și anume o pereche $<D,I>$ unde D este *domeniul* modelului (o mulțime de obiecte), iar I este o funcție de *interpretare* care dă clauze de evaluare pentru fiecare conector logic (aceeași evaluare pentru fiecare model) și atribuie fiecărui simbol non-logic din limbaj genuri corespunzătoare de obiecte, construite din obiectele care aparțin lui D. Pentru a fi mai specifici asupra acestui punct, trebuie să adăugăm că semantica de ordinul al doilea standard se află în aceeași categorie cu semantica pentru limbajul logicii de ordinul întâi, în virtutea faptului că domeniul ambelor este de același tip, și anume o mulțime de obiecte individuale. Așadar, prin fixarea unui domeniu D, mulțimea obiectelor asignabile atât variabilelor de ordinul întâi cât și variabilelor de ordinul al doilea este stabilită. Funcția I va avea grijă, ca să spunem așa, de atribuirea unui obiect, în mod corespunzător construit din obiectele luate din D, fiecărui simbol non-logic. Pe de altă parte, semantica de ordinul al doilea standard se deosebește în mod esențial de semantica Henkin, în măsura în care doar în cazul acesteia din urmă, și nu și în cazul celei dintâi, trebuie să împărțim domeniul interpretării în mulțimi separate: una pentru variabilele de ordinul întâi (variabilele-individ) și una pentru variabilele de ordinul al doilea (variabilele-propoziție, variabilele-funcție n-adice și variabilele-predicat n-adice), pentru oricare $n \in \mathbb{N}$.

Semantica standard stil-Tarski pentru un limbaj de ordinul al doilea va consta dintr-o extindere a conceptului de model de ordinul întâi pentru limbajul logicii de ordinul întâi în felul pe care-l explicăm în continuare:

Un model standard al unui limbaj pentru logica de ordinul al doilea, care conține cel puțin o variabilă de ordinul al doilea, este o structură $<D,I>$, în care D este o mulțime de obiecte și I este o funcție-interpretare. O *atribuire* (*asignare*) *pentru variabile* este o funcție de la fiecare variabilă de ordinul întâi și de ordinul al doilea la elemente luate din D. Astfel, o *atribuire pentru variabile* va asigna un membru al lui D fiecărei variabile de ordinul întâi, o funcție de la D^n la D fiecărei variabile-funcție n-adice și o submulțime a lui D^n fiecărei variabile-relație n-adice. În măsura în care vrem să înfățișăm diferența principală dintre semantica standard și semantica Henkin (despre care voi avea mai multe de spus mai târziu, după ce voi fi prezentat și semantica Henkin), să remarcăm că în semantica standard, o *atribuire* pentru o variabilă-predicat n-adică X^n într-un limbaj de ordinul al dolea este o funcție de la X^n la mulțimea *tuturor* n-tuplurilor luate din D, adică mulțimea putere a lui D^n.

Fie acum $\mathcal{M} = <D,I>$ un model și s o asignare pe $\mathcal{M}$. Denotatul variabilei-funcție n-adice $f(t_1,\ldots,t_n)$ în $\mathcal{M}$ sub asignarea s este valoarea funcției $s(f^n)$ în $\mathcal{M}$ la șirul de membri ai lui D denotați de către fiecare termen t_i în $\mathcal{M}$ sub s. (Funcția-denotare pentru termenii limbajului logicii de ordinul al doilea se obține în mod direct din omologul său de ordinul întâi.)

Satisfacerea va fi același gen de relație între modele, asignări și formule, precum în logica de ordinul întâi, și vom obține definiția inductivă proprie pentru conceptul de formulă de ordinul al doilea adevărată într-un model $\mathcal{M}$ sub asignarea s, adăugând următoarele trei noi clauze pentru o formulă atomară de ordinul al doilea, o

cuantificare universală de ordinul al doilea asupra variabilelor-funcție şi respectiv o cuantificare universală de ordinul al doilea asupra variabilelor-predicat. Astfel,

(I^S) Dacă X^n este o variabilă-predicat n-adică şi $t_1,...,t_n$ este o secvență de n termeni, atunci $\mathcal{M}, s \vDash X^n t_1,...,t_n$ ddacă secvența de membri ai lui D denotați de către fiecare t_i, $1 \leq i \leq n$, sub asignarea s este un element al lui $s(X^n)$.

(II^S) $\mathcal{M}, s \vDash (\forall f)\Phi$ ddacă $\mathcal{M}, s' \vDash \Phi$ pentru fiecare asignare s' care este exact precum s la fiecare variabilă, exceptând posibil f.

(III^S) $\mathcal{M}, s \vDash (\forall X)\Phi$ ddacă $\mathcal{M}, s' \vDash \Phi$ pentru fiecare asignare s' care este exact precum s la fiecare variabilă exceptând posibil X.

În virtutea inter-definibilității lui '$\exists$' şi '$\forall$', clauzele corespunzătoare pentru '$(\exists f)$' şi '$(\exists X)$' pot fi derivate cu uşurință din clauzele (II^S) şi (III^S) de mai sus.

Semantica-Henkin pentru limbajul logicii de ordinul al doilea

Cea de-a doua semantică pentru limbajul logicii de ordinul al doilea este semantica-Henkin. Trăsătura distinctivă a ei este că variabilelor-predicat n-adice şi variabilelor-funcție n-adice pot să li se asigneze obiecte din submulțimi stricte ale lui D^n şi respectiv $D^n \times D$. Cu alte cuvinte, domeniul de obiecte de asignare al fiecărei variabile-predicat şi variabile-funcție este o submulțime fixată de relații şi de funcții din domeniul interpretării, care se poate foarte bine să *nu includă toate* relațiile şi toate funcțiile de pe D^n şi respectiv $D^n \times D$.

Un model-Henkin este un 4-tuplu $\mathcal{M}^H = \langle D,D^*,F,I\rangle$ în care D şi I sunt domeniul modelului şi respectiv o funcție-interpretare pentru vocabularul non-logic al limbajului. Itemii noi din acest gen nou de model, anume D^* şi F, sunt o secvență de

mulțimi de relații pe D^n, și respectiv o secvență de mulțimi de funcții pe $D^n \times D$. Astfel, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ finit, $D^*(n)$ este o submulțime nevidă a mulțimii putere a lui D^n, iar $F(n)$ este o submulțime nevidă a mulțimii de funcții de la D^n la D. Ideea intuitivă subiacentă acestei construcții a unui model-Henkin este că variabilelor-predicat n-adice li se asignează obiecte din $D^*(n)$ și variabilelor-funcție n-adice obiecte din $F(n)$.

O *atribuire pentru variabile* pe un model-Henkin se deosebește în mod semnificativ de omoloaga sa dintr-un model-standard. Deși este încă o funcție care face să corespundă variabilelor de ordinul întâi membri ai lui D, ea variază în mod esențial față de ceea ce este o atribuire pentru variabile pe un model-standard în ceea ce privește variabilele-predicat și variabilele-funcție. Astfel, o atribuire de variabile pe un model-Henkin pune în corelație fiecare variabilă-predicat n-adică cu un membru al lui $D^*(n)$, care, așa cum am remarcat deja, poate să fie o submulțime proprie a mulțimii putere a lui D^n, și fiecare variabilă-funcție n-adică cu un membru al lui $F(n)$, care, de asemenea, poate să fie o submulțime proprie a colecției funcțiilor de la D^n la D.

Partea componentă a semanticii-Henkin care se adaugă elementelor deja prezentate este în mod fundamental identică semanticii-standard, exceptând, desigur, noua semnificație pe care o capătă 'asignarea pentru variabile' în semantica-Henkin. Există, așadar, patru clauze noi:

($\text{I}^{\mathcal{H}}$) Fie $\mathcal{M}^{\mathcal{H}} = \langle D, D^*, F, I \rangle$ un model-Henkin și s o asignare pe $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$. Denotatul lui $f(t_1,\ldots,t_n)$ în $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$ este valoarea funcției $s(f^n)$ la secvența de membri ai lui D care sunt referințele fiecărui termen t_i, $1 \leq i \leq n$, pe $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$, sub asignarea s.

($\text{II}^{\mathcal{H}}$) Dacă X^n este o variabilă-predicat n-adică și $t_1,\ldots,t_n$ o secvență de termeni, atunci $\mathcal{M}^{\mathcal{H}} \models X^n t_1,\ldots,t_n$ ddacă secvența de membri ai lui D care sunt referenții, în mod

corespunzător, ai fiecărui termen t_i, $1 \leq i \leq n$, pe $\mathcal{M}^H$, sub asignarea s, este un element care aparține lui $s(X^n)$.

(III^H) $\mathcal{M}^H$, $s \vDash (\forall f)\Phi$ ddacă $\mathcal{M}^H$, $s' \vDash \Phi$ pentru fiecare asignare s' pe $\mathcal{M}^H$, care concordă cu s la fiecare variabilă, exceptând posibil variabila f.

(IV^H) $\mathcal{M}^H$, $s \vDash (\forall X)\Phi$ ddacă $\mathcal{M}^H$, $s' \vDash \Phi$ pentru fiecare asignare s' pe $\mathcal{M}^H$, care concordă cu s la fiecare variabilă, exceptând posibil variabila X.

Întreaga diferență dintre semantica-standard şi semantica-Henkin, adică între clauzele (I^S) - (III^S) prezentate cu 2 pagini în urmă şi clauzele (I^H) - (IV^H) de aici, poate fi explicată în termenii semnificațiilor diferite care sunt ataşate expresiei 'fiecare asignare' în (II^S) şi (III^S), pe de o parte, şi în (III^H) şi (IV^H), pe de altă parte. În cazul semanticii-standard o asignare pentru o variabilă-predicat n-adică şi pentru o variabilă-funcție n-adică face în aşa fel încât variabila să parcurgă *întreaga* mulțime putere a lui D^n, şi respectiv colecția *tuturor* funcțiilor de la D^n la D. În timp ce în cazul semanticii-Henkin colecția obiectelor asignate poate fi ***restricționată*** doar la acele asignări care atribuie membri ai diferitelor $D^*(n)$, unde $D^*(n) \subset D^n$, şi ai diferitelor $F(n)$, unde $F(n) \subset D^n \times D$, variabilelor de ordin superior, adică variabilelor-predicat n-adice şi respectiv variabilelor-funcție n-adice.

Pentru a pune în evidență într-o manieră şi mai clară diferența relevantă dintre cele două genuri de semantici pentru limbajul logicii de ordinul al doilea, să privim mai îndeaproape la aceeaşi distincție, trasată de data aceasta din perspectiva complementară a *cuantorilor de ordinul al doilea.* O imagine mai limpede poate fi obținută aici, dacă înlocuim semantica stil-Tarski, bazată pe conceptul de asignare, cu o semantică bazată pe conceptul de schimbare a modelului, precum este semantica pe care o folosesc Boolos şi Jeffery în cartea lor *Computability and Logic* (1974, 1989).

Ceea ce urmărim să obținem aici este o înțelegere mai bună și mai ușoară a punctului remarcat înainte, legat de diferența de semnificație a expresiei '*asignare* a unor obiecte corespunzătoare din D vocabularului non-logic', în cele două genuri de semantici. Pentru aceasta să considerăm cuantificarea universală doar a unei variabile-predicat și să arătăm cum diverg condițiile de adevăr ale acestui conector în cele două semantici care ne preocupă aici, semantica-standard și semantica-Henkin.

În cazul considerat aici, aparatul formal suplimentar de care este nevoie pentru semantica bazată pe conceptul de schimbare a modelului este o mulțime de litere-predicat. Fiecare literă-predicat urmează a lua locul unei ocurențe libere corespunzătoare a unei variabile-predicat, care devine liberă prin eliminarea cuantorului de ordinul al doilea care este evaluat. Această nouă mulțime de constante-predicat este cerută exact de procedura care ne permite să rezolvăm problema evaluării valorii de adevăr a unei propoziții, care conține o ocurență liberă a unei variabile-predicat, într-un tip de interpretare bazat pe conceptul de schimbare a modelului. Această interpretare nu face apel la asignarea de obiecte din domeniul interpretării ocurențelor libere ale variabilelor-predicat. Astfel, dacă F este o formulă în care poate să apară o variabilă-predicat n-adică liberă X^n, iar R este o literă-predicat n-adică (un nume al unei proprietăți), atunci $F_X R$ este propoziția (închisă) care este obținută din F prin substituirea tuturor ocurențelor libere ale lui X în F cu R. Atunci $\mathcal{I}^R_\Phi$ va fi interpretarea care se va deosebi de interpretarea $\mathcal{I}$ (*dacă* se va deosebi) doar prin asignarea funcției caracteristice Φ lui R. Să spunem, pe scurt, că în general, funcția caracteristică Φ a unei mulțimi S este acea funcție care corelează în mod univoc obiectele pe care este definită Φ cu valoarea-de-adevăr adevărul ('$\top$'), dacă și numai dacă fiecare dintre acele obiecte aparține mulțimii S.

Acum, contrastul dintre interpretarea standard şi interpretarea Henkin este bine pus în evidenţă de către următoarele două perechi de clauze pentru cuantorul universal de ordinul al doilea în semantica bazată pe schimbarea modelului:

$(\forall^S)$: $\mathcal{I}((\forall X)F) = \top$ dacă $\mathcal{I}^R_{\Phi}(F_X R) = \top$ pentru fiecare funcţie caracteristică Φ care are numărul potrivit de argumente şi este ***definită peste tot*** pe domeniul lui $\mathcal{I}$.

$\mathcal{I}((\forall X)F) = \bot$ dacă $\mathcal{I}^R_{\Phi}(F_X R) = \bot$ pentru cel puţin o funcţie caracteristică Φ care are numărul potrivit de argumente şi este ***definită peste tot*** pe domeniul lui $\mathcal{I}$.

$(\forall^H)$: $\mathcal{I}((\forall X)F) = \top$ dacă $\mathcal{I}^R_{\Phi}(F_X R) = \top$ pentru fiecare funcţie caracteristică Φ care are numărul potrivit de argumente şi este ***definită pe o submulţime*** a mulţimii putere a domeniului lui $\mathcal{I}$.

$\mathcal{I}((\forall X)F) = \bot$ dacă $\mathcal{I}^R_{\Phi}(F_X R) = \bot$ pentru cel puţin o funcţie caracteristică Φ care are numărul potrivit de argumente şi este ***definită pe o submulţime*** a mulţimii putere a domeniului lui $\mathcal{I}$.

Cu alte cuvinte, forţa expresiei 'pentru fiecare proprietate X', aşa cum este relevată aceasta de către clauzele $(\forall^S)$ în semantica standard, este aceea de a face ca cuantorul universal să parcurgă mulţimea ***tuturor*** submulţimilor cu un număr potrivit de obiecte luate din domeniu. În timp ce forţa aceleiaşi expresii, care este dată de către clauzele $(\forall^H)$ din semantica Henkin, este aceea de a face ca cuantorul universal să parcurgă 'mai puţin' decât mulţimea tuturor submulţimilor. Aşadar, în cazul semanticii Henkin, ***este admisibil***, deşi nu este obligatoriu, ca '$(\forall X)$' să parcurgă o submulţime proprie a mulţimii putere a domeniului interpretării.

Ceea ce face ca oricare colecţie de reguli pentru cuantorii de ordinul al doilea, care sunt corecţi faţă de interpretarea standard, să fie *incompletă* faţă de acea interpretare, în timp ce unele colecţii de reguli pentru cuantorii de ordinul al doilea, care sunt corecţi faţă de interpretarea Henkin, sunt *complete* faţă de acea interpretare,

este exact această deosebire de semnificație pe care cele două genuri de semantici o atașează expresiei 'asignare de obiecte din domeniul interpretării variabilelor libere de ordinul al doilea', sau, în mod alternativ, este diferența de forță a expresiei 'pentru fiecare proprietate X'.

Înainte de a schița demonstrația acestor două rezultate importante din logica de ordinul al doilea, să privim puțin înainte la motivația nevoii de a le utiliza în argumentul nostru principal din acest capitol. Ideea principală pentru care voi argumenta este aceea că limbajul logicii modale a propozițiilor poate fi corelat cu limbajul logicii de ordinul al doilea. Iar apoi, distincția dintre sisteme modale normale complete și sisteme modale normale incomplete, care este generată de către noțiunea de formulă validă definită prin intermediul unei mulțimi de *cadre-Kripke*, poate fi explicată în termenii incompletitudinii oricărei mulțimi de reguli pentru cuantorii de ordinul al doilea, care sunt corecți față de interpretarea de ordinul al doilea standard, adică în termenii incompletitudinii logicii de ordinul al doilea cu interpretare standard. Temeiul acestui fapt este acela că semantica lumilor posibile pentru sistemele modale normale, care este bazată pe noțiunea de *cadre-Kripke*, poate fi corelată cu semantica standard corespunzătoare pentru limbajul de ordinul al doilea. Pe de altă parte, distincția însăși dintre sisteme modale normale complete și sisteme modale normale incomplete nu se obține atunci când noțiunea de formulă modală validă este definită prin intermediul unei colecții de *cadre-generale*, temeiul acestui fapt fiind acela că tipul din urmă de semantică modală poate fi pus în corelație cu *semantica-Henkin* pentru logica de ordinul al doilea, și că există sisteme de ordinul al doilea care sunt complete față de acest tip de semantică pentru limbaje de ordinul al doilea.

Reguli de inferență pentru cuantori de ordinul al doilea

Iată aici, mai întâi, regulile în stilul lui Gentzen (cf. Forbes, 1994) pentru eliminarea şi introducerea cuantorului universal de ordinul al doilea, '$\forall^2$', într-un sistem foarte simplu de ordinul al doilea S^2, precum acela care a fost schițat înainte.

Regula Eliminării $\forall^2$: Pentru fiecare propoziție $\ulcorner(\forall^2 X)\Phi X\urcorner$ şi formulă Ψ, dacă $\ulcorner(\forall^2 X)\Phi X\urcorner$ a fost inferată la un rând j într-o demonstrație, atunci la un rând k putem infera $\Phi[\Psi/X]$, etichetând rândul 'j $\forall^2$E' şi scriind la stânga lui aceleaşi numere precum acelea care apar la stânga în rândul j. Schematic,

$$a_1,\ldots,a_n\ (j)\ (\forall^2 X)\Phi X$$

$$\vdots$$

$$a_1,\ldots,a_n\ (k)\ \Phi[\Psi/X] \qquad\qquad j\ \forall^2 E$$

Sintactic, $\Phi[\Psi/X]$ este obținută din $\ulcorner(\forall^2 X)\Phi X\urcorner$ prin eliminarea cuantorului prefix $\ulcorner(\forall^2 X)\urcorner$ şi prin înlocuirea, apoi, a *fiecărei* ocurențe a lui X în propoziția deschisă ΦX prin Ψ. Pentru a conserva buna-formare, Ψ trebuie să aibă acelaşi grad ca şi X, adică trebuie să aibă acelaşi număr de constante şi de variabile libere precum X, şi acestea trebuie să ocupe aceleaşi poziții; în plus, nici o variabilă legată în Ψ nu trebuie să apară în Φ.

Regula Introducerii $\forall^2$: Pentru fiecare propoziție ΦR, unde R este o constantă pentru o proprietate sau relație, dacă ΦR a fost inferată la un rând j într-o demonstrație, atunci, *dacă R nu apare în nici o premisă sau asumpție al cărei număr este la stânga rândului j*, la rândul k putem infera $\ulcorner(\forall^2 X)\Phi X\urcorner$, etichetând rândul 'j $\forall^2$I' şi scriind la stânga lui aceleaşi numere precum cele care apar la stânga rândului j.

Schematic,

$$a_1,\ldots,a_n\ (j)\ \Phi R$$
$$\vdots$$
$$a_1,\ldots,a_n\ (k)\ (\forall^2 X)\Phi X \qquad j\ \forall^2 I$$

unde R nu este în nici unul dintre rândurile $a_1,\ldots,a_n$ şi X este o variabilă-predicat care nu apare în Φ. Din punct de vedere sintactic, $\ulcorner(\forall^2 X)\Phi X\urcorner$ este obținută prin înlocuirea *fiecărei* ocurențe a lui R în propoziția ΦR de către variabila-predicat X şi apoi prin prefixarea cuantorului $\ulcorner(\forall^2 X)\urcorner$. Pentru a păstra buna-formare, X trebuie să aibă acelaşi grad precum R; în plus, X nu trebuie să apară deja legat în Φ.

Incompletitudinea logicii de ordinul al doilea cu semantică standard versus completitudinea logicii de ordinul al doilea cu semantică Henkin

Putem intra acum în miezul argumentului principal al acestui capitol, care începe cu demonstrația *incompletitudinii oricărei colecții S^2 de reguli pentru cuantorii de ordinul al doilea, reguli care sunt corecte față de semantica de ordinul al doilea standard pentru limbajul de ordinul al doilea al lui S^2*.

Aşa cum se ştie foarte bine, *compactitatea* este valabilă în logica de ordinul întâi. Iar aceasta înseamnă că fiecare mulțime, indiferent dacă este finită sau infinită, de propoziții de ordinul întâi Γ, ale cărei submulțimi finite Γ' sunt de aşa fel încât toate au un model, are ea însăşi un model. Compactitatea logicii de ordinul întâi decurge din corectitudinea *şi completitudinea* logicii de ordinul întâi. Pentru că să presupunem că Γ nu are un model. Decurge atunci că absurditatea este o consecință

semantică a lui Γ, adică $\Gamma \models \curlywedge$. Acum, deoarece sistemul logic de ordinul întâi S, în al cărui limbaj sunt notate propozițiile din mulțimea Γ, este *complet* (în sens tare), decurge că $\Gamma \vdash_S \curlywedge$. Din caracterul *finit* al fiecărei demonstrații din S, care este o asumpție substanțială, decurge, de asemenea, că există o mulțime finită Γ', astfel încât $\Gamma' \subseteq \Gamma$, şi $\Gamma' \vdash_S \curlywedge$. Prin ipoteză, S este corect față de semantică, adică regulile lui S conservă validitatea, ceea ce înseamnă că pentru fiecare mulțime de propoziții Γ din limbajul lui S, dacă $\Gamma \vdash_S \curlywedge$ atunci $\Gamma \models \curlywedge$. Aşadar, grație *corectitudinii* lui S, $\Gamma' \models \curlywedge$. Aşadar, ceea ce avem aici este că pentru fiecare mulțime de propoziții de ordinul întâi Γ, dacă $\Gamma \models \curlywedge$, atunci există cel puțin o mulțime finită Γ', în aşa fel încât $\Gamma' \subseteq \Gamma$, şi $\Gamma' \models \curlywedge$. Citind prin contrapoziție, rezultatul pe care l-am obținut este: dacă $\Gamma' \not\models \curlywedge$ atunci $\Gamma \not\models \curlywedge$, cu Γ şi Γ' precum mai înainte. În cuvinte, aceasta înseamnă – dacă fiecare submulțime finită Γ' a mulțimii Γ, indiferent dacă aceasta din urmă este finită sau infinită, are un model, atunci Γ însăşi are un model. Iar aceasta este exact proprietatea *compactității*. În rezumat, raționamentul care demonstrează compactitatea (semanticii) logicii de ordinul întâi este acela că, luate împreună, *completitudinea* + *corectitudinea* + *natura finitistă a demonstrației* în logica de ordinul întâi **implică** *compactitatea* logicii de ordinul întâi.

Acum, simplu spus, fiecare colecție de reguli de ordinul al doilea, care sunt *finitiste în natura lor* şi care sunt *corecte* față de semantica standard, este în mod necesar *incompletă* față de aceeaşi semantică, pentru că logica de ordinul al doilea **nu** este compactă. Deoarece în general, dacă o semantică pentru un limbaj al unui sistem logic S este demonstrabilă ca fiind necompactă, atunci, cu condiția ca regulile lui S să

fie corecte față de noțiunea de validitate, așa cum este ea definită de către acea semantică, regulile lui S sunt incomplete față de acea semantică. Dar *este* demonstrabil că semantica *standard* pentru logica de ordinul al doilea este necompactă. Și prin urmare, în măsura în care ceea ce prezintă interes autentic sunt numai mulțimi de reguli de ordinul al doilea corecte, fiecare colecție de astfel de reguli trebuie să fie incompletă.

Rămâne acum să se arate că, într-adevăr, semantica standard pentru oricare limbaj de ordinul al doilea este necompactă. Ideea generală a demonstrației este că necompactitatea semanticii standard pentru un limbaj de ordinul al doilea decurge din faptul că conceptul de finitudine este exprimabil în limbaj. (În consecință, tocmai pentru că semantica pentru limbajul de ordinul întâi este compactă, nu poate să existe o mulțime Σ de propoziții de ordinul întâi ale unui limbaj dat, astfel încât pentru fiecare interpretare $\mathcal{I} = (D,V)$ pentru propozițiile din Σ, $\mathcal{I} \vDash \Sigma$ ddacă $D_{\mathcal{I}}$ este finit. Cu alte cuvinte, *a fi finit* nu este un concept exprimabil în limbajul de ordinul întâi.)

Pentru scopurile demonstrației stipulăm că V este o mulțime de propoziții, în așa fel încât cel puțin una dintre propoziții este o propoziție de ordinul al doilea. Astfel, în mod intuitiv, mulțimea infinită care ne va servi în demonstrația noastră conține (i) condiția de finitudine-Dedekind, potrivit căreia o mulțime se spune că este finită-Dedekind ddacă mulțimea nu este echinumeroasă cu nici o submulțime proprie a ei însăși, condiție care se traduce în propoziția exprimabilă în limbajul de ordinul al doilea (dar nu și în cel de ordinul întâi) că fiecare relație serială unu-la-unu este o relație pe, și de asemenea (ii) propoziția că există cel puțin n lucruri, pentru fiecare n finit.

Așadar, fie următoarea mulțime

V = $\{((\forall R)\{[(\forall x)(\exists y)Rxy \;\&\; (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)((x \neq y \;\&\; (Rxz \;\&\; Ryu)) \rightarrow z \neq u)] \rightarrow (\forall y)(\exists x)Rxy\}), (\exists x)(x = x), (\exists x)(\exists y)(x \neq y), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(x \neq y \;\&\; y \neq z \;\&\; x \neq z), \ldots\}$.

Pentru a vedea eşecul compactităţii pentru semantica standard a logicii de ordinul al doilea, este suficient să arătăm că deşi fiecare submulţime finită V' a lui V are un model, cu toate acestea V însăşi nu are nici un model, deoarece nu poate fi cazul că toate propoziţiile lui V sunt realizabile simultan. Astfel, să presupunem că propoziţia de ordinul al doilea care exprimă condiţia de finitudine-Dedekind este adevărată într-o interpretare dată $\mathcal{I} = (D,V)$ al cărei domeniu D are mărimea n, pentru un n finit. Atunci, fiecare propoziţie care aparţine submulţimii infinite a lui V care conţine propoziţiile 'Există cel puţin $n + 1$ lucruri', 'Există cel puţin $n + 2$ lucruri', 'Există cel puţin $n + 3$ lucruri', ... este cu necesitate falsă în $\mathcal{I}$. Aşadar, indiferent cum alegem o submulţime finită a lui V, putem produce o interpretare, al cărei domeniu are o mărime finită n, care este un model al acelei submulţimi finite alese. Dar dacă condiţia de finitudine-Dedekind este una dintre propoziţiile din submulţime şi este adevărată în acea interpretare al cărei domeniu are mărimea (finită) n atunci propoziţiile celelalte, care pretind că există cel puţin $n + 1$ lucruri, $n + 2$ lucruri, $n + 3$ lucruri, ş. a. m. d., vor fi false în acea interpretare, determinând în acest fel situaţia ca V să nu aibă un model, chiar dacă fiecare submulţime finită a sa are unul. Prin urmare, compactitatea nu se obţine pentru semantica standard a logicii de ordinul al doilea.

Aşadar, pentru a rezuma acest pas, deoarece *corectitudinea + completitudinea + natura finitistă a demonstraţiei* ***implică*** *compactitatea*, decurge că fiecare colecţie de reguli de ordinul al doilea, care sunt *corecte* faţă de semantica de ordinul al doilea standard, este *incompletă* exact pentru că semantica de ordinul al doilea standard este *necompactă*. Sau, pentru a formula acelaşi rezultat într-un alt mod, care este însă cam înşelător, logica de ordinul al doilea (standard) este incompletă. (Formularea aceasta

din urmă este cam înşelătoare, deoarece nu logica este aceea care este incompletă, ci oricare formalizare corectă a ei.)

O remarcă colaterală, care este totuşi importantă pentru înţelegerea de către noi a relaţiei dintre conceptele şi rezultatele principale care sunt legate de această chestiune, va urmări acum să clarifice o distincţie referitoare la două noţiuni importante de incompletitudine. Distincţia merită să fie clarificată, deoarece există o conexiune strânsă între aceste două noţiuni. Noţiunile pe care le vizez aici sunt incompletitudinea Aritmeticii (Peano) formale de ordinul întâi (care face obiectul celebrei Prime Teoreme de Incompletitudine a lui Gödel), şi incompletitudinea logicii de ordinul al doilea standard ('reală'). Voi da temeiul acestei distincţii într-un mod informal şi succint, arătând că există o altă demonstraţie pentru incompletitudinea logicii de ordinul al doilea standard, iar în această demonstraţie incompletitudinea oricărei colecţii de reguli de ordinul al doilea, care sunt corecte faţă de semantica standard, este o consecinţă logică a faptului că aritmetica de ordinul întâi este incompletă.

Este bine cunoscut faptul că teoria pe care o obţinem prin intermediul formalizării de ordinul întâi a Aritmeticii Peano, anume AP^1, nu este categorică. Cu alte cuvinte, această formalizare nu poate să caracterizeze numerele naturale, deoarece într-o formulare de ordinul întâi aritmetica de ordinul întâi completă Ω_1 are un model 'non-standard'. Totuşi, din AP^1 se poate obţine o teorie mai puternică, anume formalizarea de ordinul al doilea a Aritmeticii Peano, adică AP^2. Pentru a obţine acest rezultat trebuie să înlocuim *schema inducţiei*

$$Ind_1\ [\Phi 0\ \&\ (\forall v)(\Phi v \rightarrow \Phi s(v))] \rightarrow (\forall v)\Phi v$$

care spune[4] că fiecare mulțime de numere definibilă aritmetic, care îl conține pe 0 și este închisă față de funcția succesor, conține toate numerele naturale, printr-o unică propoziție de ordinul al doilea, anume

$$Ind_2\ (\forall X)\{[X0\ \&\ (\forall x)(Xx \rightarrow Xs(x))] \rightarrow (\forall x)Xx\}.$$

De fapt, Ind_2 face aceeași asertiune precum Ind_1, dar puterea sa expresivă este mai mare, pentru că Ind_2 face această asertiune despre *toate* mulțimile de numere naturale, indiferent dacă sunt sau nu definibile aritmetic. Teoria AP^2, care a fost obținută așa cum s-a arătat mai sus, este categorică, deoarece, până la izomorfism, ea are numai un model, anume $\mathcal{N}$, al cărui domeniu este mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale.

Pentru a da acum demonstrația (cea de-a doua în acest capitol) că logica de ordinul al doilea standard este incompletă, pornim cu Aritmetica Peano de ordinul al doilea și cu faptul important că fiecare model al lui AP^2 este izomorfic cu modelul standard pentru Ω_1, adică cu $\mathcal{N}$. Fie acum σ o propoziție de ordinul întâi astfel încât $AP^2 \models \sigma$. Atunci $\sigma \in \Omega_1$. Să presupunem acum (căutând să obținem o contradicție) că există un sistem de ordinul al doilea S^2 care este atât corect cât și *complet*. În consecință, $AP^2 \vdash_{S^2} \sigma$, deoarece $AP^2 \models \sigma$. Totuși, putem recunoaște efectiv demonstrațiile corecte. Dar atunci, din cele de mai înainte decurge că elementele lui Ω_1 pot fi enumerate efectiv de către o enumerare efectivă a tuturor demonstrațiilor posibile ale lui S^2. Deci, mulțimea numerelor-Gödel ale fiecărei $\sigma \in \Omega_1$ este enumerabilă recursiv. Dar exact această posibilitate din urmă este eliminată de către Prima Teoremă de Incompletitudine a lui Gödel, care are drept una dintre principalele sale consecințe faptul că Ω_1 nu este enumerabilă recursiv. Așadar, *cu condiția ca* Prima Teoremă a lui Gödel să fie adevărată, asumpția existenței unui sistem de

[4] Este important să observăm că Ind_1 *nu* este o propoziție, ci o *schemă*, care este, ca să zicem așa, precum un schelet pentru o propoziție, cu condiția ca lui Φ să i se asigneze o mulțime corespunzătoare de numere care este definibilă aritmetic.

ordinul al doilea S^2 care este atât corect cât şi *complet* este de nesusţinut. Şi deoarece Prima Teorema a lui Gödel *este* (demonstrabil) adevărată, decurge că fiecare sistem de ordinul al doilea S^2 care este corect faţă de semantica standard trebuie să fie *in*complet faţă de această semantică.

Acum, este evident că din moment ce Prma Teoremă de Incompletitudine a lui Gödel este presupusă în această demonstraţie a incompletitudinii logicii de ordinul al doilea standard, este foarte firesc ca cele două 'genuri' de incompletitudine să nu fie chiar unul şi acelaşi lucru, exceptând situaţia că demonstraţia este circulară, ceea ce, desigur, nu este cazul.

Ajungem acum la demonstraţia de completitudine a logicii de ordinul al doilea cu semantică Henkin. Acest rezultat important este produs, esenţialmente, prin aceeaşi tehnică prin care se stabileşte completitudinea logicii nemodale de ordinul întâi (cu, sau fără identitate).[5] Astfel, vrem să demonstrăm

Teorema Completitudinii. Pentru fiecare mulţime Σ^2 de propoziţii de ordinul al doilea şi fiecare propoziţie (de ordinul întâi, sau de ordinul al doilea) σ, dacă $\Sigma^2 \models \sigma$, atunci $\Sigma^2 \vdash_{S^2} \sigma$

unde printr-o 'mulţime de propoziţii de ordinul al doilea' înţelegem o mulţime de propoziţii de aşa fel încât cel puţin una dintre membre este o propoziţie de ordinul al doilea, iar S^2 este o colecţie de reguli corecte pentru cuantorii de ordinul al doilea. Pentru a obţine acest rezultat, trebuie să dăm o demonstraţie pentru teorema-Henkin, deductiv echivalentă cu teorema completitudinii, care spune

[5] De fapt, la o conferinţă în onoarea lui A. Church (Buffalo, Mai 1990), Henkin a declarat că descoperirea sa a completitudinii logicii de ordin superior (cu semantica ce-i poartă numele) a fost făcută înainte de descoperirea completitudinii logicii de ordinul întâi, care istoric vorbind, a fost o adaptare a celei dintâi. (Cf. (Shapiro, 1990), pg. 96.)

Teorema-Henkin. Fiecare mulțime Σ^2 de propoziții de ordinul al doilea care este S^2-consistentă este relizabilă-Henkin într-un model.

Ceea ce urmează este o schiță care redă esențialul acestei demonstrații de completitudine. Primul pas este demonstrația lemei lui Lindenbaum. Această demonstrație a fost deja dată în primul capitol, pentru scopurile demonstrării completitudinii sistemelor modale normale. Ceea ce ne dă această lemă este că fiecare mulțime S^2-consistentă de propoziții Σ^2 este inclusă într-o mulțime de propoziții Γ^2, care este maximal S^2-consistentă.

Următorul pas, care este oglindit de strategia demonstrării completitudinii logicii de ordinul întâi, este să construim un model în semantica-Henkin pentru limbajul logicii de ordinul al doilea, în care fiecare propoziție din mulțimea Γ^2, care este maximal S^2-consistentă, este realizabilă-Henkin. Mai întâi, avem nevoie de o extindere $\mathcal{L}^{2+}$ a limbajului $\mathcal{L}^2$ al lui Γ^2. Pentru aceasta adăugăm o mulțime denumerabilă de *constante individuale noi* c_0, c_1, ... o mulțime denumerabilă de *litere-predicat* n-adice C^n_0, C^n_1, ... pentru fiecare număr natural n, şi o mulțime denumerabilă de *simboluri-funcție* n-adice g^n_0, g^n_1, ... pentru fiecare număr natural n.

Fie acum Φ_1, Φ_2, ... o enumerare a tuturor formulelor din $\mathcal{L}^{2+}$ a căror unică variabilă liberă este variabila-individ x; fie Ψ_1, Ψ_2, ... o enumerare a tuturor formulelor din $\mathcal{L}^{2+}$ a căror unică variabilă liberă este una dintre variabilele-predicat n-adice X^1, X^2,...; şi fie Θ_1, Θ_2, ... o enumerare a tuturor formulelor din $\mathcal{L}^{2+}$ a căror unică variabilă liberă este una dintre variabilele-funcție n-adice f^1, f^2, ...

Mai departe, definim recursiv un şir Σ_0, Σ_1, ... de mulțimi de propoziții astfel:

$\Sigma_0 = \Gamma^2$

$\Sigma_{m+1} = \Sigma_m \cup \{(\exists x)\Phi_m(x) \rightarrow \Phi_m(c_i),\ (\exists X^n)\Psi_m(X^n) \rightarrow \Psi_m(C^n_j),$

$(\exists f^n)\Theta_m(f^n) \rightarrow \Theta_m(g^n_k)\}$

unde c_i este o *nouă* constantă individuală (prima) din enumerarea din listă, care nu apare în Φ_m, Ψ_m, Θ_m, sau în nici unul din membrii lui Σ_m; n este *gradul* variabilei-predicat libere din Ψ_m; C^n_i este o *nouă* literă-predicat (constantă), (prima) din enumerarea din listă, care nu apare în Φ_m, Ψ_m, Θ_m, sau în nici unul dintre membrii lui Σ_m; p este *gradul* variabilei-funcție libere în Θ_m; şi g^p_k este un *nou* simbol-funcție, (primul) din enumerarea din listă, care nu apare în Φ_m, Ψ_m, Θ_m, sau în nici unul dintre membrii lui Σ_m.

Motivația introducerii consecventului fiecărui condițional al cărui antecedent este o cuantificare existențială corespunzătoare asupra variabilelor-indivizi, variabilelor-predicat şi respectiv variabilelor-funcție este dată de cerința ca fiecare mulțime Σ_i, şi prin urmare reuniunea acestora, să fie *completă-Henkin*. O mulțime de propoziții de ordinul al doilea Σ_i este *completă-Henkin* ddacă ori de câte ori Σ_i conține o propoziție de forma $\ulcorner(\exists v)\Phi_i(v)\urcorner$ sau de forma $\ulcorner(\exists V^n)\Psi_i(V^n)\urcorner$ sau de forma $\ulcorner(\exists t^p)\Theta_i(t^p)\urcorner$, Σ_i conține, de asemenea, o instanță ('martor') de forma $\Phi_i(c_i/v)$ sau $\Psi_i(C^n_j/V^n)$ sau respectiv $\Theta_i(g^p_k/t^p)$, şi ori de câte ori Σ_i conține o propoziție de forma $\ulcorner\sim(\forall v)\Phi_i(v)\urcorner$ sau de forma $\ulcorner\sim(\forall V^n)\Psi_i(V^n)\urcorner$ sau de forma $\ulcorner\sim(\forall t^p)\Theta_i(t^p)\urcorner$, ea conține, de asemenea, o instanță de forma $\ulcorner\sim\Phi_i(c_i/v)\urcorner$ sau $\ulcorner\sim\Psi_i(C^n_j/V^n)\urcorner$ sau respectiv $\ulcorner\sim\Theta_i(g^p_k/t^p)\urcorner$, unde v, V^n, şi t^p sunt meta-variabile cărora li se asignează variabile-indivizi, variabile-predicat n-adice şi respectiv variabile-funcție p-adice şi c_i este o constantă-individ care înlocuieşte fiecare ocurență a lui v în $\Phi_i(v)$, C^n_j este o literă-predicat n-adică (constantă) care înlocuieşte fiecare ocurență a lui V^n în $\Psi_i(V^n)$, şi g^p_k este un simbol-funcție p-adic (constantă) care înlocuieşte fiecare ocurență a lui t^p în $\Theta_i(t^p)$.

Fie acum $\Sigma = \cup \Sigma_m$. Se poate demonstra atunci că mulțimea Σ este S^2-consistentă, iar detaliile acestei construcții sunt aceleaşi precum în construcția

omoloagă din cazul de ordinul întâi. În conformitate cu lema lui Lindenbaum, există o mulțime Σ' a limbajului extins $\mathcal{L}^{2+}$ astfel încât $\Sigma \subseteq \Sigma'$, şi Σ' este maximal S^2-consistentă. Este limpede că $\Gamma^2 \subseteq \Sigma'$.

Definim acum un model-Henkin în care fiecare propoziție din Σ' este realizabilă simultan şi păstrăm în minte analogia strânsă cu construcția pentru cazul de ordinul întâi. Modelul este construit din constante (indivizi) şi mulțimi de constante. Iar detaliile tehnice se vor deosebi în funcție de prezența sau de absența simbolului pentru identitate, '=', din limbajul $\mathcal{L}^{2+}$ al propozițiilor care aparțin lui Σ'. În cazul mai simplu, atunci când limbajul nu conține identitatea, modelul-Henkin care va fi de folos pentru demonstrarea completitudinii logicii de ordinul al doilea cu interpretare Henkin este o specificare de felul următor:

Definim un model-Henkin ca fiind 4-tuplul $\mathcal{M}^H = \langle D, D^*, F, I \rangle$.

(i) Pentru $D_{\mathcal{M}^H}$, să considerăm mulțimea tuturor constantelor-indivizi c_i, $i \in \mathbb{N}$ care apar în propozițiile din Σ'.

(ii) Pentru $D^*_{\mathcal{M}^H}$ luăm mulțimea tuturor submulțimilor de constante din D care sunt admise drept asignări, adică sunt în extensiunea fiecărei litere-predicat n-adice C^n_i, pentru $n, i \in \mathbb{N}$.

(iii) Pentru $F_{\mathcal{M}^H}$ să considerăm mulțimea tuturor $n+1$-tuplurilor de constante $\langle\langle c_1,\ldots,c_n\rangle, c_{n+i}\rangle$ luate din D, care sunt admise drept asignări pentru fiecare simbol-funcție n-adic g^n_j, pentru $n, j \in \mathbb{N}$, astfel încât $\langle c_1,\ldots,c_n\rangle$ este inputul lui g^n_j, iar c_{n+1} este outputul pe care-l produce g^n_j la acel input.

(iv) Definim funcția-interpretare $I_{\mathcal{M}^H}$ ca o asignare care satisface următoarele constrângeri:

(a) Dacă c_i este o constantă-individ, $I_{\mathcal{M}^H}[c_i] = c_i$. Cu alte cuvinte, fiecare constantă-individ se numeşte pe sine însăşi.

(b) Dacă π este o literă-propoziție, $I_{\mathcal{M}^H}[\pi] = \top$ ddacă $\pi \in \Sigma'$.

(c) Dacă C este o literă-predicat n-adică, atunci $I_{\mathcal{M}^H}: C^n \Rightarrow D^*_{\mathcal{M}^H}$ şi $<c_1,\ldots,c_n> \in I_{\mathcal{M}^H}[C]$ ddacă $C(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma'$; astfel, $I_{\mathcal{M}^H}[C] = \{<c_1,\ldots,c_n> : C(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma'\}$..

(d) Dacă g este un simbol-funcție n-adic, atunci $I_{\mathcal{M}^H}: g^n \Rightarrow F_{\mathcal{M}^H}$ şi $<<c_1,\ldots,c_n>, c_{n+i}> \in I_{\mathcal{M}^H}[g]$ ddacă $g(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma'$; sau în mod echivalent $I_{\mathcal{M}^H}[g] = \{<<c_1,\ldots,c_n>, c_{n+i}>: C(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma'\}$.

. Pentru a arăta acum că Σ' are un model, demonstrăm că pentru fiecare propoziție σ a lui $\mathcal{L}^{2+}$, σ este satisfăcută de către modelul-Henkin $\mathcal{M}^H$ pentru Σ' ddacă $\sigma \in \Sigma'$. Astfel, ceea ce trebuie să demonstrăm este următoarea propoziție:

Lema Henkin pentru Logica de Ordinul al Doliea fără Identitate. Pentru oricare σ, $\mathcal{M}^H \models_{<>} \sigma$ ddacă $\sigma \in \Sigma'$, unde $\mathcal{M}^H$ este modelul-Henkin pentru Σ'.

Demonstrația, pe care nu o voi prezenta aici, este analoagă aceleia din cazul de ordinul întâi şi se desfăşoară prin inducție pe lungimea (complexitatea) lui σ.

Adăugarea simbolului identității limbajului $\mathcal{L}^{2+}$ cere o ajustare a modelului-Henkin, de care este nevoie în demonstrația completitudinii. Deoarece, din moment ce modelul este alcătuit din constante-indivizi care apar în $\mathcal{L}^{2+=}$, dacă o propoziție de identitate care conține două nume distincte, să zicem 'a = b', apare în Σ', atunci **Lema** de mai sus eşuează. Întrucât este evident că $\mathcal{M}^H \models_{<>}$ a = b ddacă $I_{\mathcal{M}^H}$[a] = $I_{\mathcal{M}^H}$[b], şi potrivit lui (iv)(a) de mai sus $I_{\mathcal{M}^H}$[a] = a şi $I_{\mathcal{M}^H}$[b] = b. Dar 'a' şi 'b' sunt simboluri distincte (constante-indivizi), de unde decurge că $\mathcal{M}^H \not\models_{<>}$ a = b. Aşadar, contrar **Lemei** de mai sus, nu este cazul că pentru toți σ, $\mathcal{M}^H \models_{<>} \sigma$ ddacă $\sigma \in \Sigma'$, unde $\mathcal{M}^H$ este modelul-Henkin pentru Σ'. Această problemă poate fi rezolvată, cu condiția să existe o modalitate de a aranja modelul-Henkin în aşa fel încât domeniul său să

conţină exact un obiect care urmează să funcţioneze drept denotat atât pentru c_i cât şi pentru c_j, pentru fiecare enunţ de identitate ι de forma $\ulcorner c_i = c_j \urcorner$, $i, j \in \mathbb{N}$, astfel încât $\iota \in \Sigma'$. În acest scop partiţionăm domeniul $D_{\mathcal{M}_H}$ al lui $\mathcal{M}^{H'}$ în clase de echivalenţă mutual exclusive şi împreună exhaustive printr-o relaţie de echivalenţă (adică o relaţie reflexivă, simetrică şi tranzitivă) în aşa fel încât c_i şi c_j vor aparţine aceleiaşi clase de echivalenţă exact în cazul în care $\ulcorner c_i = c_j \urcorner \in \Sigma'$. Construim apoi un nou model-Henkin pentru $\mathcal{M}^{H'}$ al cărui domeniu nu mai este mulţimea de constante-indivizi a limbajului $\mathcal{L}^2$, ci exact acele clase de echivalenţă ale constantelor-indivizi aranjate aşa cum s-a indicat mai sus. În fine, stipulăm că fiecare constantă-individ denotă nu pe sine însăşi, ci clasa căreia îi aparţine, făcând ca în felul acesta, de pildă 'a' şi 'b' să aibă acelaşi denotat, aşa cum am dorit dintru început.

Iată acum ajustarea modelului-Henkin anterior, care este cerută de către demonstraţia lemei Henkin pentru limbajele cu identitate. Stipulăm că acest nou model-Henkin pentru $\mathcal{L}^{2+=}$ este 4-tuplul $\mathcal{M}^{H'}/\approx\ = \langle D_{\approx}, D^*_{\approx}, F_{\approx}, I_{\approx} \rangle$, unde $\approx$ este o relaţie de echivalenţă care partiţionează domeniile D, D^*, şi F. În mod corespunzător, $D_{\approx}$, $D^*_{\approx}$, $F_{\approx}$, $I_{\approx}$ sunt după cum urmează:

(1) $D_{\approx} = D_{\mathcal{M}_H}/\approx$, unde '$D_{\mathcal{M}_H}/\approx$' este mulţimea claselor echivalente *modulo* $\approx$;

(2) $D^*_{\approx} = D^*_{\mathcal{M}_H}/\approx$;

(3) $F_{\approx} = F_{\mathcal{M}_H}/\approx$;

(4) $I_{\approx}[c] = \tilde{c}$, pentru fiecare constantă-individ c în $\mathcal{L}^{2+=}$, unde $\tilde{c}$ este clasa de echivalenţă a lui c modulo $\approx$;

(5) Dacă π este o literă-propoziţie, $I_{\approx}[\pi] = \top$ ddacă $\pi \in \Sigma'$.

(6) Dacă C este o literă-predicat n-adică, atunci $I_{\approx}$: $C^n \Rightarrow D^*_{\approx}$, şi $<\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_n> \in I_{\approx}[C]$ ddacă $C(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma'$; astfel, $I_{\approx}[C] = \{<\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_n> : C(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma'\}$.

(7) Dacă g este un simbol-funcție n-adic, atunci $I_{\approx}$: $g^n \Rightarrow F_{\approx}$, şi $<<\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_n>, \tilde{c}_{n+1}> \in I_{\approx}[g]$ ddacă $g(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma'$; aceasta revine la $I_{\approx}[g] = \{<<\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_n>, \tilde{c}_{n+1}>: C(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma'\}$.

Ideea intuitivă care stă la baza acestei ajustări a modelului-Henkin este simplă, chiar dacă aparatul tehnic poate să pară complicat. Astfel, elementele domeniului $D_{\approx}$ sunt clase de echivalență de constante-indivizi *modulo* relația de echivalență $\approx$; *mutatis mutandis* pentru elementele lui $D^*_{\approx}$ şi $F_{\approx}$. Fiecare constantă-individ a lui $\mathcal{L}^{2+=}$ denotă acea clasă de echivalență a cărei membră este constanta respectivă. Un şir de n-tupluri de clase de echivalență de constante-indivizi luate din domeniul $D^*_{\approx}$ este în extensiunea unei litere-predicat n-adice, dacă rezultatul concatenării acelei litere-predicat cu un şir de constante-indivizi, una din fiecare clasă, este exact o propoziție care aparține lui Σ'. Acelaşi lucru se aplică, *mutatis mutandis*, extensiunii oricărui simbol-funcție n-adic, care parcurge numai mulțimea $F_{\approx}$.

În aceste împrejurări, putem stabili printr-o demonstrație similară prin inducție pe complexitatea fiecărei propoziții σ din limbajul $\mathcal{L}^{2+=}$ că dacă $\Sigma'^{=}$ este o mulțime de propoziții S^2-maximal-consistentă şi completă-Henkin într-un limbaj de ordinul al doilea $\mathcal{L}^{2+=}$ cu identitate, atunci dacă $\mathcal{M}'^{=}/\approx = <D_{\approx},D^*_{\approx},F_{\approx},I_{\approx}>$ este obținut din modelul-Henkin corespunzător $\mathcal{M}'^{=} = <D,D^*,F,I>$ pentru mulțimea de propoziții Σ' prin intermediul procedurii indicate mai sus, atunci se obține următorul rezultat:

Lema Henkin pentru Logica de Ordinul al Doilea cu Identitate. Pentru toți σ, $\mathcal{M}^H/\approx \models_{\diamond} \sigma$ ddacă $\sigma \in \Sigma'^{=}$, unde $\mathcal{M}^H/\approx$ este modelul-Henkin pentru $\Sigma'^{=}$.

Evident, Lema Henkin este echivalentă logic cu completitudinea tare a unor mulțimi de reguli de ordinul al doilea care sunt corecte față de semantica-Henkin.

Traducerea canonică a limbajului logicii modale a propozițiilor în limbajul logicii de ordinul al doilea

Până în acest punct, am putut arăta că toate sistemele logice de ordinul al doilea standard, care sunt corecte, sunt incomplete şi că unele logici de ordinul al doilea Henkin, care sunt corecte, sunt complete. Este acum momentul să facem următorul pas în schema generală a argumentului nostru. Ceea ce urmăresc să arăt este felul în care poate fi pus în corespondență limbajul logicii modale a propozițiilor cu limbajul logicii de ordinul al doilea. Apoi, va trebui să extindem corelația la semanticile celor două genuri de logică. Astfel, fiecare versiune a semanticii lumilor posibile, una bazată pe noțiunea de cadre-Kripke, iar cealaltă pe noțiunea de cadre-generale, va fi pusă în corelație cu semantica standard şi respectiv cu semantica Henkin pentru logica de ordinul al doilea. Pentru a realiza acest scop, avem nevoie de o colecție de reguli recursive de traducere (scheme), care vor lua ca input formulele (fbf-urile) limbajului logicii modale propoziționale (LLMP) şi care vor produce drept output formulele corespunzătoare ale limbajului logicii de ordinul al doilea (LLOD).

Ceea ce căutăm aici este un limbaj în care traducerea pe care urmează să o realizăm să fie eficientă pentru explicația pe care vrem să o dăm, şi anume explicarea incompletitudinii logicii modale drept fenomen legat de incompletitudinea logicii de ordinul al doilea. Şi se dovedeşte că ceea ce ne trebuie este un limbaj de ordinul al

doilea, care, din motive evidente, va fi numit limbajul traducerii canonice (LTC). De fapt, construcția LTC cerută aici este compatibilă cu două opțiuni diferite, ceea ce indică faptul că nu există nici o constrângere absolută să construim LTC ca pe un limbaj de ordinul al doilea. Astfel, dacă am fi interesați de traducerea limbajului logicii modale a propozițiilor pentru alte rațiuni teoretice, atunci am putea opta pentru considerarea LTC ca un limbaj de ordinul întâi al lumilor posibile. În acest tip de LTC, este nevoie de două sorturi de variabile, unul dintre tipurile de variabile parcurgând domeniul lumilor posibile, iar celălalt sort parcurgând domeniul indivizilor. Totuşi, putem fi chiar mai stricți şi să considerăm fbf-urile bi-sortate ale acestei variante de LTC, drept abrevieri pentru fbf-uri mono-sortate cu predicate speciale pentru indivizi şi lumi.

Trebuie să nu pierdem din vedere că scopul corelării LLMP cu LTC este obținerea unei înțelegeri adecvate a fenomenului incompletitudinii în logica modală, prin intermediul incompletitudinii oricărui sistem logic de ordinul al doilea standard, care este corect. Şi pentru a îndeplini *acest* scop, este mai potrivit să construim LTC ca pe un tip de LLOD, creându-ne astfel posibilitatea, totodată, de a corela nu numai LLMP cu LLOD, dar şi structurile semantice modale subiacente cu omoloagele lor de ordinul al doilea. În câteva cuvinte, ceea ce urmărim aici este producerea mecanismului care ne va permite să reasamblăm întregul aparat necesar pentru demonstrarea incompletitudinii sistemului VB (a se vedea capitolul precedent) în termenii care sunt proprii logicii de ordinul al doilea. Ideea, desigur, este că o rederulare a demonstrației modale a incompletitudinii lui VB în limbajul şi semantica logicii de ordinul al doilea nu numai că este corectă din punct de vedere metodologic, ci şi plină de intuiții şi de învățăminte explicative.

Lexiconul LTC:

O variabilă-individ 'w'; nici o constantă-individ; o literă-propoziție '人'; pentru fiecare literă-propoziție π a LLMP, exceptând '人', litera-predicat monadică corespunzătoare λ_π; pentru fiecare literă-propoziție π a LLMP, exceptând '人', variabila-predicat monadică corespunzătoare τ_π; conectori propoziționali, simbolurile pentru cuantorii de ordinul al doilea şi de ordinul întâi '$\forall^2$' '$\exists^2$', '$\forall$', '$\exists$', şi paranteze.

Sintaxa LTC:

(*f-at*): '人' este o fbf atomară; pentru fiecare literă-predicat λ, şi fiecare variabilă-predicat τ $\ulcorner\lambda w\urcorner$, $\ulcorner\tau w\urcorner$ sunt fbf-uri atomare;

(*f-con*): Dacă Φ şi Ψ sunt fbf-uri (atomare sau moleculare) tot aşa sunt $\ulcorner\sim\Phi\urcorner$, $\ulcorner\Phi\ \&\ \Psi\urcorner$, $\ulcorner\Phi\vee\Psi\urcorner$, $\ulcorner\Phi\rightarrow\Psi\urcorner$, şi $\ulcorner\Phi\leftrightarrow\Psi\urcorner$.

(*f-q*^{1}): Dacă Φ este o fbf, atunci $\ulcorner(\exists w)\Phi\urcorner$, şi $\ulcorner(\forall w)\Phi\urcorner$ sunt fbf-uri.

(*f-q*^{2}): Dacă Φ este o fbf, atunci $\ulcorner(\exists^2\tau_\pi)(\exists^1 w)\Phi\urcorner$, şi $\ulcorner(\forall^2\tau_\pi)(\forall^1 w)\Phi\urcorner$ sunt fbf-uri.

(*f!*): Nimic nu este fbf, dacă nu este certificată ca atare de către regulile precedente.

Schemele recursive pentru traducerea formulelor modale ale LLMP în LTC:

(*Trad*^{2}*-at*): (a) $Trad^2[人,v]$ = '人', unde 'v' este o variabilă de ordinul întâi fixată;

(b) dacă π este o literă-propoziție $\in$ LLMP, alta decât '人', $Trad^2[\pi,v] = \ulcorner\lambda_\pi\urcorner$, unde λ_π este predicatul afectat de simbolul prim care corespunde literei-propoziție π;

(*Trad*^{2}*-*$\sim$): $Trad^2[\sim\Phi,v] = \ulcorner\sim Trad^2[\Phi,v]\urcorner$;

(*Trad*^{2}*-&*): $Trad^2[(\Phi\ \&\ \Psi),v] = \ulcorner(Trad^2[\Phi,v]\ \&\ Trad^2[\Psi,v])\urcorner$;

(*Trad*^{2}*-*$\vee$): $Trad^2[(\Phi\vee\Psi),v] = \ulcorner(Trad^2[\Phi,v]\vee Trad^2[\Psi,v])\urcorner$;

(*Trad*^{2}*-*$\rightarrow$): $Trad^2[(\Phi\rightarrow\Psi),v] = \ulcorner(Trad^2[\Phi,v]\rightarrow Trad^2[\Psi,v])\urcorner$;

($Trad^2$-↔): $Trad^2[(\Phi \leftrightarrow \Psi),v] = \ulcorner(Trad^2[\Phi,v] \leftrightarrow Trad^2[\Psi,v])\urcorner$;

($Trad^2$-□): $Trad^2[\Box\Phi,v] = \ulcorner(\forall v')(Rvv' \rightarrow Trad^2[\Phi,v'])\urcorner$;

($Trad^2$-◇): $Trad^2[\Diamond\Phi,v] = \ulcorner(\exists v')(Rvv' \,\&\, Trad^2[\Phi,v'])\urcorner$.

Pentru a obține propoziția de ordinul al doilea care este omoloaga unei propoziții modale, aplicăm schemele $Trans^2$ dinspre exterior spre interior. Astfel, dacă Φ_μ este oricare propoziție în LLMP, începem cu o aplicație a clauzei $Trad^2$ potrivite asupra conectorului principal al lui Φ_μ, şi apoi, la fiecare pas ulterior, aplicăm schemele $Trad^2$ potrivite conectorilor principali ai fiecăror formule astfel obținute. Oprim traducerea după ce $Trad^2$ a fost aplicată fiecărei litere-propoziție (fbf atomare), care apare în Φ_μ. Merită să observăm că în ($Trad^2$-□), şi ($Trad^2$-◇), apare o nouă meta-variabilă v'. Tocmai pentru a obține o unică traducere pentru o formulă necesitate sau posibilitate, putem stipula că există o ordine specifică în care urmează să fie alese astfel de variabile atunci când sunt aplicate acele două clauze $Trad^2$, de pildă, mai întâi 'u', apoi 'v', apoi 'u'', apoi 'v'', ş. a. m. d.

Rezultatul acestor aplicări ale $Trad^2$ va fi o propoziție deschisă a LTC, cu variabilele-predicat libere care corespund literelor-propoziție din Φ_μ. Astfel, dacă Φ_μ este '◇(A ∨ B)', iar variabilele-predicat care corespund lui 'A' şi 'B' sunt 'X', şi respectiv 'Y', atunci, după aplicări succesive evidente ale schemelor $Trad^2$, ceea ce obținem este propoziția de ordinul al doilea deschisă Φ_σ cu 'X' şi 'Y' libere:

$(\exists u)(Rwu \,\&\, (Xu \vee Yu))$.

Acum, Φ^*_σ este traducerea de ordinul al doilea *integrală* a lui Φ_μ, prescurtat *todi*[Φ_μ], ddacă Φ^*_σ este închiderea universală a lui Φ_σ cu privire la toate variabilele libere de ordinul întâi şi de ordinul al doilea ale lui $Trad^2[\Phi_\mu,w]$, şi $\Phi_\sigma = Trad^2[\Phi_\mu,w]$. În simboluri,

$todi[\Phi_\mu] = \Phi^*_\sigma = (\forall p_1)\ldots(\forall p_n)(\forall w)Trad^2[\Phi_\mu,w]$, unde $p_1,\ldots,p_n$ sunt variabilele-predicat monadice (variabilele de ordinul al doilea) corespunzătoare literelor-propoziție $\pi_1,\ldots,\pi_n$ care apar în Φ_μ.

Corelarea semanticii modale cu semantica de ordinul al doilea

Totuşi, nu numai formulele LLMP trebuie corelate cu formule corespunzătoare ale LLOD. Pentru a construi explicația incompletitudinii modale avem nevoie, de asemenea, de o cale de a reconfigura semantica modală a lumilor posibile, şi principalele noțiuni modale metalogice definibile în această semantică, drept semantică de ordinul al doilea şi respectiv noțiuni metalogice de ordinul al doilea. Este util să ne reamintim în acest sens că în capitolul anterior au fost dezvoltate două semantici modale diferite. Anume, una care este bazată pe noțiunea de *cadru-Kripke* şi o a doua care este bazată pe noțiunea de *cadru-general*. Principalul concept modal care prezintă interes pentru chestiunea completitudinii vs. incompletitudine, şi anume noțiunea de *formulă modală validă într-un cadru*, primeşte bine cunoscuta definiție 'formulă adevărată în fiecare lume în fiecare model bazat pe un cadru dat'. Şi desigur, definiția va diferi corespunzător conceptului de cadru în discuție, adică corespunzător faptului dacă se lucrează cu un *cadru-Kripke* sau cu un *cadru-general*.

Arăt în continuare cum să reconfigurăm semantica modală drept semantică de ordinul al doilea. Pentru a simplifica şi uşura trimiteri la noțiuni deja discutate, voi reintroduce aici principalele noțiuni care țin de interpretarea unui limbaj modal propozițional, lucruri de care ne-am ocupat în primul şi în al doilea capitol.

Astfel, o interpretare sau *model-Kripke* $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ al unei secvențe în LLMP este un triplet $\mathcal{M}_{\mathcal{K}} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$, unde $W_{\mathcal{M}}$ este o mulțime de lumi; $R_{\mathcal{M}}$ este o relație binară pe mulțimea $W_{\mathcal{M}}$, astfel încât pentru fiecare w_i și w_j, $i, j \in \mathbb{N}$, $<w_i, w_j> \in R_{\mathcal{M}}$ ddacă w_i stă în relația $R_{\mathcal{M}}$ cu w_j și $R_{\mathcal{M}}$ satisface anumite condiții; și $V_{\mathcal{M}}$: *Prop*(LLMP) $\rightarrow \wp(W)$ este o funcție care este definită pe fiecare literă-propoziție $\pi \in$ LLMP și ia valori în mulțimea tuturor submulțimilor lui $W_{\mathcal{M}}$, atribuind astfel fiecărei litere-propoziție π o submulțime de lumi din $W_{\mathcal{M}}$ (intuitiv, acele lumi la care π este adevărată); așadar, $V(\pi) \in \wp(W_{\mathcal{M}})$. Un *cadru-Kripke* $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ este o pereche care constă dintr-o mulțime de lumi și o relație binară pe acea mulțime, adică $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} = (W_{\mathcal{F}}, R_{\mathcal{F}})$. Dacă $\mathcal{M}_{\mathcal{K}} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}}) = (\mathcal{F}_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$, spunem că $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ este *bazat pe* cadrul $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ și că $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ este cadrul lui $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$. Pentru fiecare fbf Φ_{μ} în LLMP, Φ_{μ} este validă într-un cadru $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} = (W_{\mathcal{F}}, R_{\mathcal{F}})$ ddacă pentru fiecare model $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ bazat pe $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ și pentru fiecare lume w în fiecare astfel de model, $(\mathcal{M}_{\mathcal{K}}, w) \vDash \Phi$.

Pe de altă parte, să ne reamintim că un *cadru-general* este un triplet ordonat $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = (W, R, G)$, unde W și R sunt definite ca mai înainte și G este o mulțime de mulțimi, uneori numite *judecăți*, fiecare element al ei fiind o mulțime de lumi din W. Prin urmare, un model-general $\mathcal{G}$ va fi un model al cărui cadru este un cadru general. Astfel, $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, V) = (W, R, G, V)$. Un model-general $\mathcal{G} = (W, R, G, V)$ va fi atunci oricare model în care V restricționează mulțimea mundană a fiecărei litere-propoziție π_i la mulțimea G; astfel, $\{w \in W; (\mathcal{M}, w) \vDash \pi_i\} \in G$. (Desigur, un cadru-Kripke sau un model-Kripke este un caz special al unui cadru-general sau respectiv model-general, anume cazul în care $G = \wp(W)$, și $V(\Phi_{\mu}) \in \wp(W)$, unde Φ_{μ} este oricare fbf din LLMP.)

Acum, dacă $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ este un *cadru-Kripke* pentru propozițiile LLMP, definim $\mathcal{I}_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}}$ structura-model de ordinul al doilea corespunzătoare lui $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, ca fiind structura model $\mathcal{I}$ al cărei domeniu D este domeniul $W_{\mathcal{F}}$ al lui $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ (mulțimea de lumi din cadrul $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$), și care asignează literei-predicat (constantei) n-adice 'Acc' o mulțime de n-tupluri de obiecte luate din D^n care corespund exact n-tuplurilor de lumi pe care $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ le asignează lui $R_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}}$. (Așadar, Acc are acelașă *grad* ca și $R_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}}$.) În mod corespunzător, pentru fiecare *model-Kripke* $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$, care este bazat pe un *cadru-Kripke*, definim $\mathcal{J}_{\mathcal{M}_{\mathcal{K}}}$, modelul de ordinul al doilea corespunzător lui $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$, ca fiind interpretarea care, în plus față de corespondența definită mai înainte între *cadre-Kripke* și *structuri-model de ordinul al doilea*, este în așa fel încât pentru fiecare literă-propoziție π din LLMP căreia i se asignează o valoare de adevăr de către fiecare lume din $W_{\mathcal{F}}$ prin funcția de evaluare $V_{\mathcal{M}_{\mathcal{K}}}$, $\mathcal{J}_{\mathcal{M}_{\mathcal{K}}}$ asignează formulei $Trad^2[\pi]$ corespunzătoare, adică literei-predicat corespunzătoare λ_π din LLOD, extensiunea care constă din exact acele $w \in W_{\mathcal{F}}$ astfel încât $w(\pi) = \top$. După cum cititorul poate ușor verifica, interpretarea $\mathcal{J}_{\mathcal{M}_{\mathcal{K}}}$ astfel obținută este un model de ordinul al doilea standard de genul aceluia definit mai înainte în acest capitol.

Același gen de manevră ne permite să facem tranziția de la un *cadru-general* și *model-general* pentru LLMP la un *cadru-Henkin* sau la un *model-Henkin* pentru LLOD. Diferența decisivă dintre cazul curent și acela elaborat în alineatul precedent este următoarea. În plus față de ceea ce am avut înainte, aici avem nevoie să corelăm mulțimea G de mulțimi de lumi luate din domeniul W al unui *cadru-general* cu mulțimea $D^*_{\mathcal{H}}$ a submulțimilor domeniului $D_{\mathcal{H}}$ a structurii-model-Henkin de ordinul al doilea. Apoi, precum mai înainte, stipulăm că funcția de valorizare $I_{\mathcal{H}}$ asignează fiecărei $Trad^2[\pi]$, adică fiecărei litere-predicat λ_π din LLOD care corespunde literei-propoziție π din LLMP, extensiunea care constă din exact acele $w \in W$ astfel

încât $w(\pi) = \top$. Evident, aceasta revine la o asignare a unei mulțimi de n-tupluri care aparțin lui $D^*_{\mathcal{H}}$ fiecărei $\lambda_\pi \in$ LLOD, ceea ce oglindește exact construcția omoloagă din cazul modal, în care mulțimi de lumi luate din $G_{\mathcal{G}}$ sunt asignate sub $V_{\mathcal{G}}$ fiecărei $\pi \in$ LLMP.

Suntem acum în măsură să formulăm o propoziție, de care este nevoie pentru explicația pe care o urmărim în acest capitol:

Pentru fiecare propoziție $\Phi_\mu \in$ LLMP există o unică propoziție corespunzătoare $\Phi_\sigma \in$ LLOD, astfel încât $\Phi_\sigma = todi[\Phi_\mu]$ şi pentru fiecare *cadru-Kripke* $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} = (W_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}}, R_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}})$ există o *structură-model* corespunzătoare *de ordinul al doilea standard* $\mathcal{I}_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}} = (D_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}}, \mathrm{Acc}_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}})$ astfel încât $(W_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}}, R_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}}) \vDash \Phi_\mu$ ddacă $(D_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}}, \mathrm{Acc}_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}}) \vDash \Phi_\sigma$.

Același rezultat ține, în mod similar, cu privire la *cadrele-generale* pentru propoziții ale LLMP şi pentru *structurile-model-Henkin de ordinul al doilea* pentru propozițiile LLOD. Pentru fiecare propoziție $\Phi_\mu \in$ LLMP există o unică propoziție corespunzătoare $\Phi_\sigma \in$ LLOD astfel încât $\Phi_\sigma = todi[\Phi_\mu]$ şi pentru fiecare *cadru-general* $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = (W_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}}}, R_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}}}, G_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}}})$ există o *structură-model-Henkin* corespunzătoare *de ordinul al doilea* $\mathcal{I}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}}} = (D_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}}}, D^*_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}}}, \mathrm{Acc}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}}})$ astfel încât $(W_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}}, R_{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}}, G_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}}}) \vDash \Phi_\mu$ ddacă $(D_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}}}, D^*_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}}}, \mathrm{Acc}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}}}) \vDash \Phi_\sigma$.

Demonstrație: Prin schemele recursive $Trad^2$, *todi*, şi inducție.

O abordare a completitudinii modale prin logica de ordinul al doilea

Avem acum detaliile principalei idei pe care vrem să o punem la lucru în vederea construirii unei explicații pentru fenomenul incompletitudinii în logica

modală propoziţională. Schemele *Trad*^{2} şi corelarea semanticii modale – atât a aceleia bazată pe cadre-Kripke, cât şi a aceleia bazată pe cadre-generale – cu semantica de ordinul al doilea – semantica standard şi respectiv semantica-Henkin – pregătesc scena pentru o înţelegere a temeiului existenţei unor sisteme modale incomplete. În contextul creat prin elaborarea acestei corespondenţe, explicaţia se va dezvolta pe două paliere distincte, cel de-al doilea constând, la rândul său, în două sub-cazuri. (i) Un palier va consta din explicarea existenţei *numai* a sistemelor modale care *sunt* complete, în condiţiile în care noţiunea de formulă validă este definită într-o semantică bazată pe conceptul de cadru-general. (ii) Cel de-al doilea palier conţine explicaţia existenţei atât a sistemelor modale complete, precum de pildă sistemul T sau sistemul S5, cât şi a sistemelor modale incomplete, precum sistemul VB, de care ne-am ocupat în capitolul precedent, în condiţiile în care noţiunea de formulă modală validă este definită într-o semantică bazată pe conceptul de cadru-Kripke.

Un interes cu totul special prezintă următoarea problemă, care motivează explicaţia căutată la punctul (ii) de mai sus şi determină defalcarea acelei explicaţii în două sub-cazuri. Iată care este problema pe care vreau să o ridic în această privinţă. Dacă incompletitudinea anumitor sisteme modale urmează a fi explicată în termenii incompletitudinii omoloagelor lor de ordinul al doilea, atunci cum se explică faptul că există, totuşi, multe sisteme modale **complete** (**caracterizabile**), de vreme ce şi aceste sisteme din urmă pot fi puse în corelaţie cu structuri de ordinul al doilea prin aceeaşi procedură recursivă? Astfel, pe lângă explicarea incompletitudinii modale în termenii incompletitudinii sistemelor de ordinul al doilea (cazul (ii).1), avem nevoie de o explicaţie a faptului că sistemele modale normale familiare sunt complete (cazul (ii).2), căci, la urma urmei, o aplicare a schemelor recursive de traducere la aceste

sisteme va produce tot o corelare a propozițiilor **acestor sisteme** cu propoziții de ordinul al doilea.

(i) În ceea ce privește explicația faptului că există *numai* sisteme modale complete, dacă noțiunea de formulă modală validă este definită într-o semantică bazată pe conceptul de cadru-general, voi lăsa de-o parte detaliile, dar voi da doar o indicație asupra modului în care putem găsi un răspuns în acord cu caracteristicile explicației generale pe care o urmărim în acest capitol. Așadar, oricare sistem modal propozițional normal S este complet față de clasa cadrelor-generale *pentru* S datorită următoarelor trei fapte: (1) limbajul modal al lui S poate fi pus în corelație prin $Trad^2$ și *todi* cu limbajul de ordinul al doilea corespunzător S^2; (2) semantica bazată pe cadrul-general în care S este interpretat poate fi pusă în corelație cu semantica-Henkin corespunzătoare pentru limbajul S^2; și (3) există cel puțin un sistem de logică de ordinul al doilea S^2, astfel încât S^2 este corect față de semantica-Henkin pentru limbajul sistemului și S^2 este, de asemenea, complet față de acea semantică-Henkin.

(ii) Pentru a da o explicație faptului că există atât sisteme modale complete cât și sisteme modale incomplete, dacă semantica cu care lucrăm este bazată pe noțiunea de cadru-Kripke, mă voi ocupa mai întâi de problema ridicată mai înainte – anume de ce există sisteme modale complete (cazul (ii).2), din moment ce acele sisteme și semanticile lor pot fi corelate și ele cu sisteme incomplete de ordinul al doilea și respectiv cu semantici standard. (Mă voi ocupa mai târziu de cazul (ii).1 (vezi pagina 162)). În acest scop, voi avea în vedere sistemele complete T și S5. După cum se știe, completitudinea lor este demonstrabilă prin metoda construirii modelelor lor canonice, metodă ale cărei elemente esențiale au fost prezentate în primul capitol.

Voi da două argumente prin care vreau să explic de ce acele sisteme, care sunt socotite a fi esențialmente de ordinul al doilea, sunt totuși complete. Primul argument

va fi schițat, doar, pe fundalul delimitat de teoria corespondenței, care este un studiu sistematic al corespondenței care se obține între formule modale și condiții de ordinul întâi și de ordinul al doilea asupra cadrelor care caracterizează sistemele modale ale căror axiome definitorii sunt acele formule modale. Cel de-al doilea argument va exploata transferul conceptului de sistem modal complet asupra conceptului unei anumite formule modale caracteristice (pentru acel sistem) de a fi completă. Acest tip de reducție – de la o entitate care are o anumită proprietate, anume un sistem modal este complet, la o altă entitate care are exact aceeași proprietate, anume o formulă caracteristică a acelui sistem este completă – poate fi elaborat în *asumpția* că ceea ce numim de obicei un sistem modal diferit de K, precum de pildă S5, este o *teorie modală* a cărei investigare urmează să se desfășoare în logica modala normală cea mai slabă, adică în sistemul K.

Cum va contribui teoria corespondenței la explicația pe care o căutăm în acest capitol? Iată aici, condensată, principala idee de care este nevoie pentru a explica completitudinea unui sistem modal. Să definim mai întâi ce înțelegem printr-o formulă modală σ_μ care corespunde unei propoziții (condiții) de ordinul întâi σ_φ: O formulă modală σ_μ **corespunde** unei propoziții de ordinul întâi σ_φ care este satisfăcută de către relația de accesibilitate $R_\mathcal{F}$ pe un cadru $\mathcal{F}$ ddacă toate cadrele în care $R_\mathcal{F}$ satisface propoziția de ordinul întâi σ_φ și numai aceste cadre sunt cadre pentru σ_μ.

Acum, vrem să spunem, în general, că un sistem modal S_μ este complet, dacă pentru fiecare formulă modală σ_μ, care este o axiomă caracteristică a lui S_μ, există o condiție de ordinul întâi σ_φ pe $R_\mathcal{F}$(desigur, în mod tipic, o condiție distinctă pentru fiecare axiomă modală) astfel încât σ_μ corespunde lui σ_φ. Cu alte cuvinte, marca definitorie a unui sistem modal complet este socotit a fi aici faptul dacă se obține o corespondență, în sensul precis definit mai sus, între axiomele modale ale sistemului

şi propoziţii de ordinul întâi care sunt satisfăcute de către relaţia de accesibilitate asupra cadrelor pentru acel sistem. Nu am de gând ca aici să dau detaliile acestei idei. Ea constituie o parte a unui subiect mare şi important, care merită să fie explorat în adâncime, dar de care nu ne putem ocupa în această carte. Aşa că vreau doar să adaug că această corespondenţă între axiomele modale ale anumitor sisteme şi condiţiile de ordinul întâi satisfăcute de către relaţia de accesibilitate asupra cadrelor pentru acele sisteme ne ajută să vedem completitudinea sistemelor modale dintr-un alt unghi. Şi anume din perspectiva completitudinii sistemelor de ordinul întâi.

Este important să observăm în această privinţă că obţinerea corespondenţei dintre o axiomă modală şi o condiţie de ordinul întâi asupra lui $R_{\mathcal{F}}$ este o condiţie *suficientă*, dar nu şi una necesară pentru ca acel sistem să fie complet. Astfel, ceea ce urmăresc să spun aici este că din faptul că există o condiţie de ordinul întâi asupra lui $R_{\mathcal{F}}$ care corespunde unei axiome modale caracteristice, decurge completitudinea acelui sistem. Dar nu vrem să facem inferenţa că din faptul că sistemul *este* complet decurge că pentru fiecare dintre axiomele sale caracteristice trebuie să existe o condiţie de ordinul întâi care este satisfăcută de către relaţia de accesibilitate impusă asupra cadrelor pentru acel sistem. Deoarece *există* formule modale ale unor sisteme complete care nu corespund nici unei condiţii de ordinul întâi şi acest fapt este suficient pentru a *elimina* ideea că pentru ca un sistem modal să fie complet trebuie ca o relaţie de corespondenţă să se obţină între axiomele modale caracteristice ale sistemului şi condiţii de ordinul întâi puse asupra relaţiei $R_{\mathcal{F}}$ din cadrele pentru acel sistem.

Ca o ilustrare a acestei părţi a argumentului, voi lua axioma modală caracteristică a sistemului T, anume

(**T**) $\Box A \rightarrow A$.

(Să ne reamintim că T = K + **T**.)

Ceea ce urmăresc să arăt este că pentru axioma caracteristică a lui T există o condiție de ordinul întâi asupra lui $R_{\mathcal{F}}$ ddacă $\mathcal{F}$ este un cadru pentru T. Această condiție este reflexivitatea lui $R_{\mathcal{F}}$. Cu alte cuvinte, $R_{\mathcal{F}}$ satisface formula de ordinul întâi '$(\forall x)Rxx$'.

Mai formal, avem nevoie să arătăm

Corespondența dintre **T** *și* **reflexivitatea** *lui* $R_{\mathcal{F}}$: $\mathcal{F}$ este un cadru pentru T ddacă $R_{\mathcal{F}}$ este reflexivă.

Demonstrație: Arătăm că *todi*$[\Box\Phi \rightarrow \Phi]$ este validă în $\mathcal{F}$ ddacă $R_{\mathcal{F}}$ este reflexivă, unde $\ulcorner\Box\Phi \rightarrow \Phi\urcorner$ este oricare instanță-substituție a lui **T**, iar $\ulcorner$*todi*$[\Box\Phi \rightarrow \Phi]\urcorner$ este traducerea integrală a oricărei astfel de instanțe-substituție în limbajul logicii de ordinul al doilea.

Todi a formulei '$\vDash_{\mathcal{F}}\Box\Phi \rightarrow \Phi$ pentru fiecare formulă Φ a LLMP' este

$\mathcal{F}\vDash (\forall X)(\forall w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow Xu) \rightarrow Xw]$.

Acum, corespondența dintre **T** și **reflexivitatea** lui $R_{\mathcal{F}}$ se obține (**T** *coresp* **refl**) ddacă următoarea este o teoremă în logica de ordinul al doilea:

$\vdash_{S_2} (\forall X)(\forall w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow Xu) \rightarrow Xw] \leftrightarrow (\forall w)Rww$.

Dăm o demonstrație în stilul deducției naturale de tip Gentzen, pentru **T** *coresp* **refl**:

1 (1) $(\forall X)(\forall w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow Xu) \rightarrow Xw]$	Asumpție
1 (2) $(\forall w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow Rwu) \rightarrow Rww]$	1 $\forall^2$E
1 (3) $(\forall u)(R\underline{w}u \rightarrow R\underline{w}u) \rightarrow R\underline{w}\underline{w}$	2 $\forall$E
(4) $(\forall u)(R\underline{w}u \rightarrow R\underline{w}u)$	IT
1 (5) $R\underline{w}\underline{w}$	3,4 $\rightarrow$E

1 (6) $(\forall w)Rww$ 5 ∀I

(7) $(\forall X)(\forall w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow Xu) \rightarrow Xw] \rightarrow (\forall w)Rww$ 1,6 →I

8 (8) $(\forall w)Rww$ Asumpție

9 (9) $(\forall u)(R\underline{w}u \rightarrow P_0u)$ Asumpție

8 (10) $R\underline{w}\underline{w}$ 8 ∀

9 (11) $R\underline{w}\underline{w} \rightarrow P_0\underline{w}$ 9 ∀E

8,9 (12) $P_0\underline{w}$ 11,10 →E

8 (13) $(\forall u)(R\underline{w}u \rightarrow P_0u) \rightarrow P_0\underline{w}$ 9,12 →I

8 (14) $(\forall w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow P_0u) \rightarrow P_0w]$ 13 ∀I

8 (15) $(\forall X)(\forall w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow Xu) \rightarrow Xw]$ 14 $\forall^2$I

(16) $(\forall w)Rww \rightarrow (\forall X)(\forall w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow Xu) \rightarrow Xw]$ 8,15 →I

(17) $\{(\forall X)(\forall w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow Xu) \rightarrow Xw] \rightarrow (\forall w)Rww\}$ &

$\{(\forall w)Rww \rightarrow (\forall X)(\forall w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow Xu) \rightarrow Xw]\}$ 7,16 &I

(18) $(\forall X)(\forall w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow Xu) \rightarrow Xw] \leftrightarrow (\forall w)Rww$ 17 Df.↔ ◆

În mod mai intuitiv, iată aici ideea care motivează obținerea rândului (2) printr-o aplicație a regulii '$\forall^2$E' asupra rândului (1). Substituim *variabila*-predicat monadică '*X*' care apare în rândul (1) şi devine liberă prin eliminarea cuantorului universal de ordinul al doilea cu *litera*-predicat monadică '*Rw*', care stă pentru proprietatea de *a fi o lume pe care w poate să o vadă*, şi este satisfăcută de către mulțimea {*u*: *Rwu*}. Ideea subiacentă celei de-a doua jumătăți a demonstrației (rândurile (8) până la (16)) este evidentă, dar întrucâtva umbrită de către limbajul în care vorbim în această demonstrație, anume LLOD. Astfel, asumăm reflexivitatea

relației de accesibilitate (la rândul (8)) și apoi introducem traducerea-$Trad^2$ a asumpției că '□A' ține la o anumită lume $\underline{w}$ (la rândul (9)), fixând astfel ca litera-predicat monadică 'P_0' să fie traducerea-$Trad^2$ a literei-propoziție 'A' din LLMP. Din aceste două asumpții inferăm traducerea-$Trad^2$ a propoziției modale, anume că 'A' ține la aceeași lume $\underline{w}$ (la rândul 12). Apoi, o aplicație a regulii '→I' ne dă rezultatul că axioma caracteristică a lui T, anume '□A → A', este o consecință deductivă din unica asumpție că relația $R_{\mathcal{F}}$ este reflexivă. În final, punem laolaltă cele două jumătăți ale demonstrației prin regula '&I' și abreviem conjuncția condiționalului direct și a conversei sale prin definiția Df.↔, obținând în felul acesta bicondiționalul cerut.

Cel de-al doilea argument bazat pe logica de ordinul al doilea pentru existența sistemelor modale complete

Există un alt aspect, diferit de acela încorporat în teoria corespondenței modale, al unui argument bazat pe logica de ordinul al doilea pentru înțelegerea fenomenului existenței sistemelor modale complete. Aspectul pe care vreau să-l explorez acum se dezvoltă în jurul distincției care poate fi trasată între un sistem logic modal și o teorie modală. Așa cum am anunțat la pagina 154, sub *asumpția* că ceea ce numim de obicei un *sistem modal* **care este diferit de** K, precum de pildă S5, este o *teorie modală* a cărei investigare trebuie îndeplinită în cea mai slabă logică modală normală, adică în sistemul K, chestiunea completitudinii modale vs. incompletitudinea modală poate fi atacată dintr-un alt unghi, care are drept punct de focalizare următoarea idee. Ceea ce am numit completitudine sau incompletitudine a sistemelor de logică modală, atunci când am socotit pe S5 sau pe VB sisteme modale, urmează a

fi explorat prin intermediul întrebării dacă *teoriile modale* S5 şi VB au proprietatea *completitudinii formulei*.

Astfel, din perspectiva nouă pe care o voi exploata în partea care a mai rămas din acest capitol, sisteme precum S5 şi VB, care înainte au fost socotite sisteme logice modale, vor fi de aici înainte teoriile modalităţii S5 şi VB, a căror logică este sistemul K. În mod corespunzător, *unica* relaţie de consecinţă deductivă este aceea definită pentru sistemul K prin intermediul definiţiei pentru $p_1,...,p_n \vdash_K q$. Astfel, din acest punct de vedere, în loc de a avea tot atât de multe definiţii ale relaţiilor de consecinţă deductivă câte teorii modale există, avem numai o astfel de definiţie, anume definiţia secvenţei $p_1,...,p_n \vdash_K q$. De asemenea, pentru fiecare dintre secvenţele-axiomă precedente ale lui S5, anume (**T**) $\Box A \vdash_{S5} A$ şi (**5**) $\Diamond A \vdash_{S5} \Box\Diamond A$, şi pentru secvenţa-axiomă caracteristică a lui VB, adică (**VB**) $\vdash_{VB} \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$, obţinem următoarele secvenţe demonstrabile în K, cu alte cuvinte relaţii de consecinţă deductivă corecte în logica modală K:

(i) $A \vdash_K \Diamond A$ (corespunzător lui **T**);

(ii) $\Diamond\Box A \vdash_K \Box A$ (corespunzător lui **5**);

(iii) $\Box\Diamond A \rightarrow \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B) \vdash_K \Box\Diamond A \,\&\, \Diamond A$ (corespunzător lui **VB**).

Noţiunea de *completitudine a formulei*, care este termenul cheie pentru această abordare, poate fi detaliată într-un mod care face ca acest concept să fie un omolog pentru conceptul anterior utilizat de completitudine a sistemului. Mai mult, în stabilirea acestei noţiuni, detaliile trebuie să facă relevante pentru scopurile acestei investigaţii distincţia dintre teorii modale şi logica lor. Astfel, spunem că o formulă σ a LLMP este *completă* ddacă toate consecinţele semantice ale lui σ şi toate

consecințele semantice ale instanțelor-substituție ale lui σ (relativ la celelalte premise și la clasa tuturor cadrelor) sunt consecințe deductive ale lui σ în logica K. În simboluri, σ este completă ddacă : dacă $\Gamma, \sigma^* \vDash \gamma$, atunci $\Gamma, \sigma^* \vdash_K \gamma$, unde σ^* este o instanță-substituție a lui σ.

Contrastul dintre un sistem modal complet, precum sistemul S5, și un sistem modal incomplet, precum sistemul VB, poate fi acum reconfigurat la nivelul formulei (sau formulelor) reprezentative pentru teoriile modale, care sunt reprezentantele acelor sisteme. Astfel, completitudinea sistemului modal S5 urmează să primească o explicație în două părți. Mai întâi, în termenii completitudinii secvențelor-axiome ale lui S5, anume (**T**) $\Box A \rightarrow A$, și (**5**) $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ în cadrul teoriei modale S5, cu privire la sistemul logic K. Iar în al doilea rând, prin intermediul a ceea ce s-ar putea numi completitudinea 'locală' a unui fragment al unui sistem logic de ordinul al doilea, care este obținut prin traducerea-*Trad*^{2} și *todi* a formulelor modale **T** și **5**, și a regulilor de derivare ale lui S5 în omoloagele lor corespunzătoare din LLOD.

Mai specific, ideea că S5 este un sistem complet este reformulată în concordanță cu terminologia asociată completitudinii formulei și sună astfel:

(**T**) $\Box A \rightarrow A$, și

(**5**) $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

sunt formule complete, stabilind pe această cale completitudinea teoriei modale S5, pentru că dacă secvențele semantice

$A, \Box\sim A \rightarrow \sim A \vDash \Diamond A$, și

$\Diamond\Box A, \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A \vDash A$

(și toate instanțele lor substituție) sunt adevărate în clasa tuturor cadrelor reflexive, simetrice și transitive, adică în clasa tuturor cadrelor pentru S5, atunci atât

$A, \Box\sim A \rightarrow \sim A \vdash_K \Diamond A$ cât și

$\Diamond\Box A, \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A \vdash_K A$

(și toate instanțele lor substituție) sunt secvențe deductive demonstrabile în K.

În ceea ce priveşte acum cea de-a doua explicaţie bazată pe logica de ordinul al doilea pentru completitudinea lui S5, ideea ei principală poate fi redată astfel. Sistemul logic de ordinul al doilea $\mathcal{S}^2 5$, care este un fragment al logicii de ordinul al doilea pe care-l putem obţine adăugând unui sistem de deducţie naturală de ordinul al doilea complet formulele

$Trad^2[\mathbf{T}]$: $(\forall X)(\forall w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow Xu) \rightarrow Xw]$,

$Trad^2[\mathbf{5}]$: $(\forall X)(\forall w)[(\exists u)(Rwu \ \& \ Xu) \rightarrow (\forall u)(Rwu \rightarrow (\exists v)(Ruv \ \& \ Xv))]$,

şi omoloagele de ordinul al doilea ale regulilor de inferenţă ale lui S5, este el însuşi complet. Este complet în sensul exact că pentru fiecare mulţime Σ de propoziţii de ordinul al doilea şi o propoziţie σ, dacă $\Sigma \vDash_{\mathcal{F}^2} \sigma$, atunci $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}5} \sigma$, unde $\mathcal{F}^2$ este clasa modelelor standard de ordinul al doilea care corespund clasei $\mathcal{F}$ a tuturor cadrelor modale reflexive, simetrice şi tranzitive, cu alte cuvinte clasei cadrelor pentru S5.

Întreaga demonstraţie a acestui rezultat al completitudinii locale a sistemului $\mathcal{S}^2 5$ faţă de clasa structurilor-model de ordinul al doilea standard, care sunt omoloage ale clasei cadrelor modale pentru S5, este complexă şi ne-ar angaja într-un ocol substanţial. Cu toate acestea, ideea intuitivă care motivează această demonstraţie este clară şi directă. Astfel, demonstraţia constă în formalizarea demonstraţiei de completitudine a sistemului modal S5 în logica de ordinul al doilea. În acest scop, mai întâi traducem axiomele şi regulile de transformare ale sistemului modal S5 în sistemul de ordinul al doilea corespunzător $\mathcal{S}^2 5$ şi 'mimăm' sistemul modal complet S5 în cadrul omologului său de ordinul al doilea. Apoi, **completitudinea** lui S5 revine, aşa cum am schiţat la începutul acestui capitol, la faptul că ***toate*** propoziţiile de ordinul al doilea care sunt ***consecinţe semantice*** ale omoloagelor de ordinul al doilea ale axiomelor lui S5 sunt ***exact*** omoloagele de ordinul al doilea ale propoziţiilor modale care sunt ***consecinţe deductive*** în cadrul acelui sistem modal

complet, adică sunt ***exact*** omoloagele de ordinul al doilea ale teoremelor lui S5. Mai general, orice poate fi inferat într-un sistem logic de ordinul al doilea din traducerile de ordinul al doilea ale axiomelor unui sistem modal complet, folosind omoloagele de ordinul al doilea ale regulilor de transformare ale acelui sistem modal, este omoloaga unei teoreme a acelui sistem modal complet.

Explicarea incompletitudinii modale prin logica de ordinul al doilea

În partea finală a acestui capitol putem da o explicație bazată pe logica de ordinul al doilea incompletitudinii sistemului VB. Această explicație are trei fațete şi mă voi ocupa de ele pe rând.

(i) Demonstrația de incompletitudine a sistemului VB, de care m-am ocupat în capitolul anterior, poate fi reformulată ca o demonstrație în logica de ordinul al doilea, grație schemelor $Trad^2$. Acest aspect este revelator în măsura în care ne permite accesul la mecanismul demonstrației modale, în ipostaza omoloagei sale din logica de ordinul al doilea. Cu toate acestea, 'reexecutarea' demonstrației modale a incompletitudinii sistemului VB într-un mediu delimitat de logica de ordinul al doilea nu se constituie într-o explicație deplină a ceea ce se petrece atunci când se produce incompletitudinea modală. Această quasi-explicație a incompletitudinii sistemului VB motivează aducerea în prim plan a celui de-al doilea aspect al explicației generale pe care o urmărim aici.

(ii) Sistemul VB este incomplet pentru că secvența-axiomă caracteristică a sistemului, şi anume $(\mathbf{VB}) \vdash_{VB} \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$, nu corespunde nici unei condiții asupra cadrelor care să fie exprimabilă în limbajul logicii de ordinul întâi, în

sensul precis al termenului 'corespondență' discutat în acest capitol; adică în sensul în care s-a demonstrat că secvența-axiomă caracteristică a sistemului T corespunde condiției '$(\forall x)$ Rxx', exprimabilă în limbajul de ordinul întâi și impusă relației $R_{\mathcal{F}}$ a clasei $\mathcal{F}$ a tuturor cadrelor pentru T și numai a acestor cadre.

(iii) Mai mult, potrivit tipului de explicație pe care-l expun aici pentru a da seamă de completitudinea sistemului S5, sistemul VB este incomplet pentru că **(VB)** $\vdash_{VB} \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B)$ este o formulă incompletă și astfel VB are proprietatea *incompletitudinii formulei*.

În continuare voi da detaliile pentru (i) și (iii) de mai sus și voi lăsa deoparte cu totul pe (ii), deoarece acest aspect al explicației se leagă mai mult de teoria corespondenței modale, care este un subiect mare și important și merită mai mult decât o tratare de suprafață.

Fațeta (i) a celei de-a doua abordări a incompletitudinii sistemului VB.

Să ne reamintim acum că în demonstrația incompletitudinii lui VB față de clasa tuturor cadrelor pentru VB au fost implicați doi pași demonstrativi. Pasul 1 – fiecare cadru pentru VB, adică pentru sistemul K + **(VB)** $\Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B)$, este un cadru pentru MV, adică pentru K + **(MV)** $\Diamond\Box A \vee \Box A$ – și Pasul 2 – **MV** nu este VB-demonstrabilă. Afirmația făcută la punctul (i) de mai sus poate fi substanțiată acum abordând o perspectivă de ordinul al doilea asupra ambelor stadii implicate în demonstrarea necaracterizabilității sistemului VB.

Tocmai pentru că sistemul VB este K + $\Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B)$, iar MV este K (din nou) + $\Diamond\Box A \vee \Box A$, Stadiul 1 revine la conceptul că în clasa tuturor cadrelor $\mathcal{F}$ pentru VB, **MV** este o consecință semantică derivabilă din **VB**. Formal,

$\Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B) \vDash_{\mathcal{F}} \Diamond\Box A \vee \Box A$.

Mai mult, deoarece **VB** este validă în clasa tuturor cadrelor pentru VB, se obține

$\models_{\mathcal{F}} \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$

de unde decurge că

$\models_{\mathcal{F}} \Diamond\Box A \vee \Box A.$

O 'privire' de ordinul al doilea la Paşii 1 şi 2 ai demonstraţiei de incompletitudine a lui VB cere acum o traducere de ordinul al doilea integrală a formulelor **VB** şi **MV** şi o reformulare a demonstraţiei în termenii unei relaţii de consecinţă semantică de ordinul al doilea, adică $\models_2$, în semantica standard de ordinul al doilea, mai degrabă decât relaţia de consecinţă semantică $\models_{\mathcal{F}}$ în clasa cadrelor modale pentru VB. Astfel, ca să începem, stipulăm mai întâi că variabilele predicat monadice 'X' şi 'Y' stau pentru predicatele prime 'A'' şi 'B'', care corespund potrivit schemelor de traducere $Trad^2$ literelor propoziţie 'A' şi 'B' în propoziţiile modale **VB** şi **MV**. Atunci traducerile de ordinul al doilea integrale ale lui $Trad^2$[**VB**] şi $Trad^2$[**MV**] sunt

$todi[\Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)] =$

$(\forall X)(\forall Y)(\forall w)\{(\exists u)(Rwu \,\&\, (\forall v)(Ruv \rightarrow Xv)) \vee (\forall u)(Rwu \rightarrow ([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \rightarrow Yu))\}$

şi respectiv

$todi[\Diamond\Box A \vee \Box A] = (\forall X)(\forall w)[(\exists u)(Rwu \,\&\, (\forall v)(Ruv \rightarrow Xv)) \vee (\forall u)(Rwu \rightarrow Xu)].$

Aceste două traduceri ne vor permite să reconfigurăm relaţia de consecinţă semantică modală, despre care s-a arătat mai sus că are loc între **VB** şi **MV**, drept următoarea relaţie de consecinţă semantică de ordinul al doilea:

$(\forall X)(\forall Y)(\forall w)\{(\exists u)(Rwu \ \& \ (\forall v)(Ruv \rightarrow Xv)) \vee (\forall u)(Rwu \rightarrow ([(\forall v)\ (Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \rightarrow Yu))\} \vDash_2 (\forall X)(\forall w)[(\exists u)(Rwu \ \& \ (\forall v)(Ruv \rightarrow Xv)) \vee (\forall u)(Rwu \rightarrow Xu)]$.

Pe scurt,

todi[**VB**] $\vDash_2$ *todi*[**MV**].

Punctul nodal al părții (i) a explicației concepute aici va fi acum să se spună că incompletitudinea sistemului VB este o consecință a incompletitudinii logicii de ordinul al doilea. Astfel, în această perspectivă de ordinul al doilea pe care o adoptăm aici asupra incompletitudinii modale, a arăta că sistemul VB este necaracterizabil de către nici o clasă de cadre-Kripke revine la a demonstra că *todi*[**VB**] $\vDash_2$ *todi*[**MV**], dar că *todi*[**VB**] $\nvDash_2$ *todi*[**MV**].

Iată acum detaliile perspectivei - în care intervine esențial logica de ordinul al doilea - asupra ambelor stadii ale demonstrației de necaracterizabilitate a lui VB. Este de aşteptat o anumită familiaritate, un anumit sentiment de déja vu, cu această demonstrație, deoarece argumentul bazat pe logica de ordinul al doilea care urmează aici ne transmite aceeaşi idee generală a demonstrației pe care am dat-o în capitolul precedent incompletitudinii modale a lui VB.

Pasul 1. Versiunea de ordinul al doilea a propoziției că fiecare cadru pentru VB este un cadru pentru MV va fi aceea că traducerea de ordinul al doilea integrală a lui **MV** este o consecință semantică de ordinul al doilea a traducerii de ordinul al doilea integrală a lui **VB**.

Astfel,

todi[$\Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$] $\vDash_2$ *todi*[$\Diamond\Box A \vee \Box A$].

Să ne reamintim pe scurt că în cazul modal demonstrația a fost articulată prin contrapoziție. Am putut arăta că fiecare model bazat pe un cadru care este un contraexemplu pentru **MV** este, de asemenea, un model care o respinge pe **VB**. În mod corespunzător, ne propunem să arătăm că are loc relația care este contrapusa consecinței semantice prezentate mai sus. Astfel,

$\ulcorner \sim todi[\Diamond\Box A \vee \Box A] \urcorner \vDash_2 \ulcorner \sim todi[\Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)] \urcorner$.

Prin urmare, ceea ce se cere este o demonstrație pentru următoarea propoziție:

(1) $\sim(\forall X)(\forall w)[(\exists u)(Rwu \,\&\, (\forall v)(Ruv \rightarrow Xv)) \vee (\forall u)(Rwu \rightarrow Xu)] \vDash_2$

$\sim(\forall X)(\forall Y)(\forall w)\{(\exists u)(Rwu \,\&\, (\forall v)(Ruv \rightarrow Xv)) \vee (\forall u)(Rwu \rightarrow ([(\forall v)\,(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \rightarrow Yu))\}$.

Transformări logice evidente, care cuprind modificarea cuantorilor, modificarea modalităților şi echivalențe veri-funcționale, produc

(2) $(\exists X)(\exists w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim Xv)) \,\&\, (\exists u)(Rwu \,\&\, \sim Xu)] \vDash_2$

$(\exists X)(\exists Y)(\exists w)\{(\forall u)(Rwu \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim Xv)) \,\&\, (\exists u)(Rwu \,\&\, ([(\forall v)\,(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \,\&\, \sim Yu))\}$.

La acest punct este util să observăm că subformula din domeniul prefixului implicansului de mai sus este o conjuncție al cărei prim conjunct este identic cu primul conjunct al subformulei care este în domeniul prefixului implicandumului. Din moment ce în mod banal fiecare formulă se implică semantic pe ea însăşi, pentru a demonstra propoziția (2) este suficient să demonstrăm că relația de consecință semantică se obține între

(3) $(\exists X)(\exists w)(\exists u)(Rwu \,\&\, \sim Xu)$

şi

(4) $(\exists Y)(\exists w)(\exists u)(Rwu \ \& \ ([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \ \& \ \sim Yu))$.

Cu alte cuvinte, vrem să arătăm acum că se obține următoarea propoziție:

(5) $(\exists X)(\exists w)(\exists u)(Rwu \ \& \ \sim Xu) \models_2 (\exists Y)(\exists w)(\exists u)(Rwu \ \& \ ([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \ \& \ \sim Yu))$.

Pentru a arăta că (5) este o secvență semantică de ordinul al doilea adevărată, este suficient să arătăm că conjuncția implicansului luată împreună cu negația implicandumului este nerealizabilă. Astfel, arăt acum că se obține următoarea relație de consecință semantică:

(6) $(\exists X)(\exists w)(\exists u)(Rwu \ \& \ \sim Xu) \ \& \ \sim(\exists Y)(\exists w)(\exists u)(Rwu \ \& \ ([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \ \& \ \sim Yu)) \models_2 \lambda$.

(6) este adevărată ddacă conjuncția din stânga semnului pentru relația de consecință semantică nu poate să fie adevărată. Pentru a arăta aceasta, evaluez fiecare conjunct şi urmăresc să arăt că nu există nici o posibilitate de a face toți conjuncții adevărați în acelaşi timp. Astfel, mutând spre interior simbolul cel mai din stânga al negației din cel de-al doilea conjunct, ceea ce obținem din (6) este

(7) $(\exists X)(\exists w)(\exists u)(Rwu \ \& \ \sim Xu) \ \& \ (\forall Y)(\forall w)(\forall u)(Rwu \rightarrow ([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \rightarrow Yu)) \models_2 \lambda$.

Arăt acum că încercarea de a face conjuncția adevărată conduce la contradicție. Astfel, pentru ca primul conjunct să fie adevărat, fie X_0, w_0 şi u_0 o literă-predicat (constantă) şi respectiv constante individuale pentru două lumi arbitrare. Atunci

(8) $(\exists X)(\exists w)(\exists u)(Rwu \ \& \ \sim Xu)$

va fi adevărată, dacă

(9) Rw_0u_0 & $\sim X_0u_0$

este adevărată. Conjuncția (9) va fi adevărată la rândul ei ddacă fiecare conjunct este adevărat. Astfel

(10) Rw_0u_0

trebuie să fie adevărată şi

(11) $\sim X_0u_0$

trebuie să fie adevărată.

Trecând acum la cel de-al doilea conjunct al lui (7), pentru ca

(12) $(\forall Y)(\forall w)(\forall u)(Rwu \rightarrow ([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \rightarrow Yu))$

să fie adevărată, fiecare instanță-substituție a ei într-o anumită interpretare dată trebuie să fie adevărată. Aşadar, următoarea instanță, cu Y_0, w_0 şi u_0 drept constante corespunzătoare în exact acele poziții în care apar variabilele cuantificate în (12), trebuie să fie adevărată:

(13) $Rw_0u_0 \rightarrow ([(\forall v)(Ru_0v \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Y_0v') \rightarrow Y_0v))] \rightarrow Y_0u_0)$.

Deoarece Rw_0u_0 este adevărată potrivit lui (10), pentru ca (13) să fie adevărată, următoarea propoziție trebuie să fie şi ea adevărată:

(14) $[(\forall v)(Ru_0v \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Y_0v') \rightarrow Y_0v))] \rightarrow Y_0u_0$.

La acest punct în abordarea demonstrației Stadiului 1 din perspectiva logicii de ordinul al doilea, trebuie să punem în lucru funcția de valorizare care a fost definită în cazul modal pentru literele-propoziție 'A' şi 'B', cu scopul de a da acea demonstrație în cazul modal. Să ne reamintim că în cazul modal mulțimea mundană a lui 'A' este mulțimea vidă, adică 'A' este falsă la fiecare lume în modelul modal, iar mulțimea mundană a lui 'B' a fost definită drept $V(B) = W - \{u\}$, adică drept complementara domeniului $W_{\mathcal{M}}$ a contramodelului $\mathcal{M} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$, unde $u \in W_{\mathcal{M}}$

este o lume în prealabil aleasă, în aşa fel încât $<w,u> \in R_{\mathcal{M}}$, iar $w \in W_{\mathcal{M}}$ este o lume arbitrară în legătură cu care se face stipularea că $(\mathcal{M}, w) \not\models \Diamond\Box A \vee \Box A$. Să ne reamintim, de asemenea, că demonstrația modală a Stadiului 1 continuă prin a se arăta că $(\mathcal{M}, w) \not\models \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B)$.

Motivația acestui ocol prin 'aranjamentul' care a fost folosit în cazul modal constă în a ne ghida în procesul heuristic prin care ajungem să construim un model de ordinul al doilea pentru (14), care este omologul modelului modal folosit înainte în demonstrarea Stadiului 1. Astfel, fie mulțimea $W - \{u\}$ extensiunea pe care această interpretare de ordinul al doilea căutată aici o asignează literei (constantei) predicat Y_0 în (14). Evident, în această interpretare consecventul lui (14), adică Y_0u_0, este fals. Şi pentru a arăta că implicansul lui (7), şi astfel al lui (6), este nerealizabil este suficient să se arate că antecedentul lui (14), adică $(\forall v)(Ru_0v \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Y_0v') \rightarrow Y_0v))$, este adevărat în aceeaşi interpretare care asignează extensiunea $W - \{u\}$ constantei-predicat Y_0.

Acum, pentru ca antecedentul lui (14), adică

(15) $(\forall v)(Ru_0v \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Y_0v') \rightarrow Y_0v))$

să fie adevărat într-o interpretare dată, fiecare instanță-substituție a sa trebuie să fie adevărată în acea interpretare. Fie

(16) $Ru_0v_0 \rightarrow ((\forall v')(Rv_0v' \rightarrow Y_0v') \rightarrow Y_0v_0)$

o instanță arbitrară a lui (15), şi să *asumăm* Ru_0v_0. Trebuie să arătăm că

(17) $(\forall v')(Rv_0v' \rightarrow Y_0v') \rightarrow Y_0v_0$

este adevărată în interpretarea dată. Există două cazuri care trebuie considerate acum.

Cazul 1. $u_0 = v_0$. Atunci, antecedentul lui (17), adică

(18) $(\forall v')(Rv_0v' \rightarrow Y_0v')$

este fals, pentru că

(19) $Rv_0u_0 \rightarrow Y_0u_0$

este o instanță falsă a lui (18). Motivul pentru care (19) este falsă este acela că potrivit Cazului 1, $u_0 = v_0$, şi prin asumpția noastră la rândul (16), Ru_0v_0 este adevărată, ceea ce face adevărat antecedentul lui (19), în timp ce consecventul său, anume Y_0u_0, este fals în acea interpretare.

Aşadar, (17) este adevărată pentru că are antecedentul fals, şi din moment ce *ea* este consecventul lui (16), al cărei antecedent a fost deja asumat a fi adevărat, decurge că (16) însăşi este adevărată. Şi întrucât orice este adevărat despre o instanță arbitrară a lui (15), aşa cum este (16), este adevărat despre oricare altă instanță a lui (15), decurge că în Cazul 1 propoziția (15) este adevărată.

Cazul 2. $u_0 \neq v_0$. Atunci din nou (17) este adevărată, deoarece consecventul ei, Y_0v_0, este adevărat în acea interpretare care asignează constantei-predicat Y_0 extensiunea $W - \{u\}$. De unde rezultă că (16) este adevărată şi că închiderea ei universală, anume (15), este adevărată şi ea.

Aşadar, (15) este adevărată în ambele cazuri. Mai mult, deoarece (15) este antecedentul lui (14), al cărei consecvent, anume Y_0u_0, este fals în acea interpretare, (14) însăşi trebuie să fie falsă în acea interpretare. Deci încercarea noastră de a găsi o interpretare în care ambii conjuncți ai implicansului (7) să fie adevărați a eşuat. Aşadar, conjuncția este nerealizabilă, ceea ce este suficient pentru a stabili adevărul lui (6) şi în consecință şi adevărul lui (5), (2) şi (1).

Cu alte cuvinte, ceea ce am putut arăta aici este că

todi[**VB**] $\models$ *todi*[**MV**]

are loc în clasa structurilor-model de ordinul al doilea, care corespund clasei cadrelor-Kripke pentru sistemul VB.

Aceasta stabileşte îndreptăţirea abordării de ordinul al doilea a Stadiului 1 al demonstraţiei de necaracterizabilitate a sistemului VB.

Pasul 2. În ceea ce priveşte perspectiva de ordinul al doilea asupra celui de-al doilea pas în demonstraţia modală a necaracterizabilităţii lui VB, adică VB $\nvdash_{VB}$ **MV**, aceasta va consta într-o ajustare în cadrul logicii de ordinul al doilea a raţionamentului implicat în cazul modal.

Să ne reamintim pe scurt că în cazul modal un cadru recesiv $\mathcal{F}$ a fost folosit pentru a defini o clasă de modele generale admisibile $\mathcal{D}$ bazate pe acel cadru, cu scopul de a arăta că oricare instanţă-substituţie a axiomei caracteristice a lui VB este validă în acea clasă, dar că **MV** nu este, ceea ce este suficient pentru a arăta că **MV** nu este demonstrabilă în VB. Este evident că există o redare (descriere) directă a acelui cadru în limbajul logicii de ordinul al doilea. Ceea ce se obţine astfel este mai întâi o structură-model de ordinul al doilea $\mathcal{F}^2 = (D, \text{Acc})$, care este omologul de ordinul al doilea al cadrului recesiv $\mathcal{F}$, în aşa fel încât mulţimea de lumi W din $\mathcal{F}$ corespunde domeniului D al structurii-model $\mathcal{F}^2$, iar relaţia de accesibilitate $R_{\mathcal{F}}$ corespunde extensiunii constantei-predicat 'Acc'. La această structură de ordinul al doilea trebuie să adăugăm apoi o mulţime $\mathcal{G}^2$ de submulţimi de elemente ale lui D, care corespunde mulţimii $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ de submulţimi ale lui $W_{\mathcal{F}}$. Aşadar, fiecare mulţime care aparţine mulţimii $\mathcal{G}^2$ este sau o mulţime finită care conţine obiecte luate din D, exceptând pe u, sau complementarele lor (infinite) în D, care conţin pe u, reflectând mulţimea $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ din cazul modal, care a fost definită drept mulţimea tuturor submulţimilor finite ale lui $W - \{u\}$ şi complementarele lor în $W_{\mathcal{F}}$.

Acum, interpretarea de ordinul al doilea, care va corespunde clasei $\mathcal{D}$ a modelelor admisibile, este un model-Henkin $\mathcal{H}_{\mathcal{G}^2}$ pentru limbajul logicii de ordinul al doilea, a cărui structură-model este aceea definită mai înainte şi a cărui funcţie de

valorizare $V_{\mathcal{HG}2}$ este definită în aşa fel încât să asigneze fiecărei litere-predicat monadice o extensiune în mulţimea $\mathcal{G}^2$. Cu alte cuvinte, $V_{\mathcal{HG}2}(\lambda'w) \in \mathcal{G}^2$, unde litera-predicat monadică $\lambda'w$ este $Trad^2(\pi)$, pentru $\pi \in$ LLMP.

Următoarea mişcare în perspectiva de ordinul al doilea pe care o adoptăm aici asupra celui de-al doilea stadiu al demonstraţiei de incompletitudine a lui VB este de acum evidentă. Mişcarea va consta într-o redare a lemelor implicate în demonstraţia modală sub forma unor transformări corespunzătoare schimbării de perspectivă. Astfel, în cazul modal au fost implicate trei leme, iar acestea pot fi redate, într-o versiune semi-formală, în felul următor:

- Dacă o propoziţie $\sigma \in$ LSML conţine, în afară de conectori, numai litere-propoziţie $\pi_1, \ldots, \pi_n$ ale căror mulţimi mundane sunt membre ale lui $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$, atunci mulţimea mundană a lui σ este o membră a lui $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

- VB este corect faţă de clasa $\mathcal{D}$ a modelelor admisibile.

- **MV** este nevalidă în clasa $\mathcal{D}$ a modelelor admisibile.

Acum avem toate elementele cerute pentru a produce o versiune de ordinul al doilea a demonstraţiilor modale pentru cele trei leme de mai înainte. De fapt, omoloagele de ordinul al doilea ale acestor leme pot fi uşor sesizate pe baza formulării lor modale. Astfel, următoarele trei leme, în versiunea de ordinul al doilea a demonstraţiei, corespund pe rând celor trei leme de mai sus:

- Dacă o propoziţie $\sigma \in$ LSOL conţine, în afară de conectori, numai litere-predicat monadice $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ ale căror extensiuni sub asignarea $V_{\mathcal{HG}2}$ a interpretării-Henkin de ordinul al doilea $\mathcal{H}_{\mathcal{G}2}$ sunt membre ale lui $\mathcal{G}^2$, atunci σ este adevărată în $\mathcal{H}_{\mathcal{G}2}$.

• Versiunea de ordinul al doilea a lui VB este corectă față de interpretarea-Henkin de ordinul al doilea $\mathcal{H}_{\mathcal{G}2}$.

• *todi*[**MV**] este nevalidă în interpretarea-Henkin de ordinul al doilea $\mathcal{H}_{\mathcal{G}2}$.

Detaliile demonstrației pot fi cu ușurință reconstruite pe baza demonstrației modale pe care am dat-o în capitolul precedent pentru lemele modale corespunzătoare. De aceea, aici voi trece peste ele.

Este important să clarificăm semnificația reală a rederulării demonstrației de incompletitudine a lui VB în versiunea de ordinul al doilea pe care o prezint aici. Reluarea demonstrației în noul context nu se constituie într-o explicație autentică a fenomenului incompletitudinii modale, deoarece esențialmente ea repetă demonstrația dată în cazul modal, chiar dacă, de data aceasta, într-un alt limbaj. Cu toate acestea, această menevră ajută la clarificarea unor aspecte, în măsura în care face posibil pentru noi să asociem incompletitudinea lui VB cu faptul că nu există o mulțime corectă și completă de reguli de inferență pentru logica de ordinul al doilea.

Oricum, aceasta nu înseamnă că ceea ce arată abordarea de ordinul al doilea a incompletitudinii lui VB este că, *în general*, în logica de ordinul al doilea $\mathbf{VB} \vdash_2 \mathbf{MV}$. O astfel de generalizare fără restricții nu intră în discuție aici, deoarece din perspectiva teoriei demonstrației, nu există ceva care să fie logic*a* de ordinul al doilea. Mai degrabă, există diferite sisteme corecte și fiecare sistem de felul acesta este semnificativ pentru unele aspecte ale relației de consecință deductivă de ordinul al doilea pe care o captează. Într-adevăr, nici una dintre aceste mulțimi de reguli de inferență nu este completă, dacă regulile sunt corecte. Totuși, în măsura în care ceea ce ne interesează aici sunt sistemul modal particular pe care l-am examinat și relația lui cu non-existența *unei* mulțimi de reguli de inferență corecte și complete pentru

logica de ordinul al doilea, două remarci sunt de natură să ne facă să înțelegem mai bine chestiunea incompletitudinii modale şi a omoloagei sale de ordinul al doilea.

(1) În mod banal, se poate defini un sistem logic de ordinul al doilea în care secvența *todi*[**VB**] $\vdash_2$ *todi*[**MV**] şi oricare instanță-substituție a ei este o *regulă primitivă*. În acest caz, **VB** încetează să mai fie o *formulă incompletă*, dar cu toate acestea sistemul astfel definit va continua să fie incomplet față de semantica sa standard de ordinul al doilea, dacă regulile sale sunt corecte față de aceeaşi interpretare.

O remarcă colaterală merită să fie făcută aici, cu scopul de a clarifica granițele nete pe care le-am trasat mai înainte între incompletitudinea modală, în calitate de fenomen de ordinul al doilea, şi incompletitudinea aritmeticii de ordinul întâi (Prima Teoremă de Incompletitudine a lui Gödel). **VB** este o formulă incompletă în cadrul teoriei modale VB şi față de **MV**, deoarece **MV** nu este demonstrabilă în sistemul K din **VB**, deşi clasa cadrelor în care **VB** este validă face ca formula **MV** să fie şi ea validă. Totuşi, **VB** nu este pentru teoria modală VB ceea ce propoziția Gödel G_T este pentru oricare teorie T, care este o subteorie axiomatizabilă corectă a lui Ω_1, adică a aritmeticii de ordinul întâi complete. Deoarece chiar dacă am adăuga propoziția nedecidabilă G_T lui T, ceea ce am obține ar fi un nou sistem T′, care ar fi supus iarăşi procedurii lui Gödel de construcție a unei propoziții nedecidabile pentru T′, ceea ce va face ca sistemul T′ la rândul său să fie incomplet în sensul lui Gödel. În timp ce formula **VB** nu este pentru sistemul (teoria modală) VB genul de propoziție *indecidabilă* care este propoziția G_T pentru T. **VB** este numai o formulă incompletă, făcând în felul acesta incomplet *sistemul* a cărui unică secvență-axiomă este această formulă, deoarece formula **MV**, care este validă față de clasa tuturor cadrelor **pentru** VB, nu este demonstrabilă în sistemul K din formula **VB**.

(2) Cea de-a doua remarcă este mai puțin banală. Pentru a pune în perspectiva corectă semnificația incompletitudinii sistemului VB prin relaționarea ei cu faptul că nu există *un* set corect şi complet de reguli de inferență de ordinul al doilea, ar fi mai lămuritor să oferim câteva dovezi suplimentare în sprijunul ideii remarcii precedente, care este aceea că abordarea de ordinul al doilea a incompletitudinii lui VB nu constă în a pretinde că secvența *todi*[**VB**] $\vdash_2$ *todi*[**MV**] nu este *în general* demonstrabilă în logica de ordinul al doilea. Păstrând în minte această remarcă, ne-ar fi de ajutor dacă am produce o derivare actuală a acestei secvențe deductive într-un sistem de ordinul al doilea. În mod corespunzător, voi da acum detaliile unei demonstrații pentru

$$\mathbf{VB} \vdash_2^{p} \mathbf{MV},$$

unde '$\vdash_2^{p}$' este relația de consecință deductivă în logica de ordinul al doilea monadică predicativă.

Strategia pentru o astfel de demonstrație poate fi sesizată printr-o inspecție atentă a demonstrației, date mai înainte în acest capitol, pentru versiunea de ordinul al doilea a Stadiului 1 din demonstrația de incompletitudine a lui VB. Detaliile acestei demonstrații sunt similare unei deducții formale şi de aceea ideea acum este de a concepe o cale de a converti acel argument semantic într-o derivare demonstrativă a secvenței cerute în logica de ordinul al doilea monadică predicativă. Astfel, urmând îndeaproape argumentul semantic prezentat mai înainte, ştim că demonstrația secvenței

todi[**VB**] $\models_2$ *todi*[**MV**]

a cerut ca litera-predicat monadică Y_0 să stea pentru extensiunea $W - \{u\}$. Aceasta sugerează că o strategie fezabilă pentru o demonstrație formală este una în care concepem un predicat care este satisfăcut exact de membrii lui $W - \{u\}$. Un astfel de

predicat este predicatul monadic '$_ \neq u_0$', care, într-o demonstrație în logica de ordinul al doilea monadică, poate fi înlocuit cu o variabilă-predicat într-o aplicație a regulii $\exists^2$I.

Iată acum o demonstrație pentru secvența deductivă

$todi[\mathbf{VB}] \vdash_2^p todi[\mathbf{MV}]$.

Procedăm prin contrapoziție, dând o demonstrație pentru secvența

$\ulcorner \sim todi[\mathbf{MV}] \urcorner \vdash_2^p \ulcorner \sim todi[\mathbf{VB}] \urcorner$.

Aşadar, acum vrem să demonstrăm secvența

$\sim(\forall X)(\forall w)[(\exists u)(Rwu \,\&\, (\forall v)(Ruv \rightarrow Xv)) \vee (\forall u)(Rwu \rightarrow Xu)] \vdash_2^p$

$\sim(\forall X)(\forall Y)(\forall w)\{(\exists u)(Rwu \,\&\, (\forall v)(Ruv \rightarrow Xv)) \vee (\forall u)(Rwu \rightarrow ([(\forall v)\,(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \rightarrow Yu))\}$.

Pentru a simplifica demonstrația, dăm următoarea demonstrație pentru secvența deductiv echivalentă

$(\exists X)(\exists w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim Xv)) \,\&\, (\exists u)(Rwu \,\&\, \sim Xu)] \vdash_2^p$

$(\exists X)(\exists Y)(\exists w)\{(\forall u)(Rwu \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim Xv)) \,\&\, (\exists u)(Rwu \,\&\, ([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \,\&\, \sim Yu))\}$

Demonstrație

1	(1) $(\exists X)(\exists w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim Xv)) \,\&\, (\exists u)(Rwu \,\&\, \sim Xu)]$	Premisă
2	(2) $(\exists w)[(\forall u)(Rwu \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim X_0v)) \,\&\, (\exists u)(Rwu \,\&\, \sim X_0u)]$	Asumpție
3	(3) $(\forall u)(Rw_0u \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim X_0v)) \,\&\, (\exists u)(Rw_0u \,\&\, \sim X_0u)$	Asumpție
3	(4) $(\forall u)(Rw_0u \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim X_0v))$	3 &E
3	(5) $(\exists u)(Rw_0u \,\&\, \sim X_0u)$	3 &E
	(6) $u_0 = u_0$	IT

(7) $\sim u_0 \neq u_0$ 6 IS (DN^+)

(8) $v_0 = v_0$ IT

(9) $(\forall v')(Rv_1v' \rightarrow Y_0v') \rightarrow v_0 = v_0$ 8 SI (PIM)

(10) $Ru_0v_1 \rightarrow ((\forall v')(Rv_1v' \rightarrow Y_0v') \rightarrow v_0 = v_0)$ 9 SI (PIM)

(11) $(\forall v)(Ru_0v \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Y_0v') \rightarrow v_0 = v_0))$ 10 $\forall^1$I

12 (12) $Rw_0u_0 \,\&\, \sim X_0u_0$ Asumpție

12 (13) Rw_0u_0 12 &E

(14) $(\forall v)(Ru_0v \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Y_0v') \rightarrow v_0 = v_0)) \,\&\, \sim u_0 \neq u_0$ 11,7 &I

12 (15) $Rw_0u_0 \,\&\, ([(\forall v)(Ru_0v \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Y_0v') \rightarrow v_0 = v_0))] \,\&\, \sim u_0 \neq u_0)$

13,14 &I

12 (16) $(\exists u)(Rw_0u \,\&\, ([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Y_0v') \rightarrow v_0 = v_0))] \,\&\, \sim u_0 \neq u_0))$

15 $\exists^1$I

3,12 (17) $(\forall u)(Rw_0u \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim X_0v)) \,\&\, (\exists u)(Rw_0u \,\&\,$

$([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Y_0v') \rightarrow v_0 = v_0))] \,\&\, \sim u_0 \neq u_0))$ 4,16 &I

3,12 (18) $(\exists w)\{(\forall u)(Rwu \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim X_0v)) \,\&\, (\exists u)(Rwu \,\&\,$

$([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Y_0v') \rightarrow v_0 = v_0))] \,\&\, \sim u_0 \neq u_0))\}$ 17 $\exists^1$I

3,12 (19) $(\exists Y)(\exists w)\{(\forall u)(Rwu \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim X_0v)) \,\&\, (\exists u)(Rwu \,\&\,$

$([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \,\&\, \sim Yu))\}$ 18 $\exists^2$I

3,12 (20) $(\exists X)(\exists Y)(\exists w)\{(\forall u)(Rwu \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim Xv)) \,\&\, (\exists u)(Rwu \,\&\,$

$([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \,\&\, \sim Yu))\}$ 19 $\exists^2$I

3 (21) $(\exists X)(\exists Y)(\exists w)\{(\forall u)(Rwu \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim Xv)) \,\&\, (\exists u)(Rwu \,\&\,$

$([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \,\&\, \sim Yu))\}$ 5,12,20 $\exists^2$E

2 (22) $(\exists X)(\exists Y)(\exists w)\{(\forall u)(Rwu \rightarrow (\exists v)(Ruv \,\&\, \sim Xv)) \,\&\, (\exists u)(Rwu \,\&\,$

$([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \,\&\, \sim Yu))\}$ 2,3,21 $\exists^2$E

1 (23) $(\exists X)(\exists Y)(\exists w)\{(\forall u)(Rwu \rightarrow (\exists v)(Ruv \ \& \sim Xv)) \ \& \ (\exists u)(Rwu \ \&$

$([(\forall v)(Ruv \rightarrow ((\forall v')(Rvv' \rightarrow Yv') \rightarrow Yv))] \ \& \sim Yu))\}$ 1,2,22 $\exists^2 E$ ◆

Aspectul al III-lea al explicației în logica de ordinul al doilea a incompletitudinii modale.

Să ne reamintim ce am spus înainte despre acest aspect. Anume, deşi redarea într-un limbaj de ordinul al doilea a demonstrației incompletitudinii lui VB este utilă, în sensul că ne lasă să aruncăm o privire asupra mecanismului fenomenului incompletitudinii modale, cu toate acestea ea nu ajunge să constituie o explicație deplină. Motivul este că o rederulare a demonstrației precedente pentru cazul modal într-un cadru de ordinul al doilea nu este altceva decât o reluare a unei vechi demonstrații într-un limbaj diferit. Este momentul acum să împingem mai departe explicația însăşi. În mod corespunzător, în secțiunea finală a acestui capitol voi da detalii ale acestei explicații pe care o urmărim aici. În acest scop, strategia mea va fi să exploatez tipul de explicație care a fost utilizat mai înainte pentru a da seamă de completitudinea sistemului S5, şi anume explicația bazată pe conceptul de *incompletitudine a formulei*. De data aceasta, însă, această noțiune va figura într-o explicație bazată pe logica de ordinul al doilea pentru incompletitudinea sistemului VB. Şi ideea generală va fi că VB, ca teorie modală, are proprietatea *incompletitudinii formulei*, pentru că secvența-axiomă caracteristică a lui VB este o formulă incompletă. Aceasta explică necaracterizabilitatea lui VB de către orice clasă de cadre-Kripke față de care sistemul este corect.

Există două componente în explicația bazată pe logica de ordinul al doilea pentru rezultatul că VB este un sistem incomplet. Mai întâi, există o abordare directă a

acestui fapt prin intermediul noțiunii de incompletitudine a formulei. Potrivit acestei noțiuni, VB este incomplet datorită următorului motiv:

$$\Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B) \vDash_{\mathcal{K}} \Diamond\Box A \vee \Box A \cdot$$

unde $\mathcal{K}$ este clasa tuturor cadrelor pentru VB, dar

$$\Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B) \nvdash_{K} \Diamond\Box A \vee \Box A.$$

Astfel, sistemul VB este incomplet pentru că formula sa caracteristică are drept consecință semantică în clasa tuturor cadrelor pentru VB o formulă care nu este, cu toate acestea, o consecință deductivă din axioma lui VB în sistemul logic K al lui VB.

În al doilea rând, avem la dispoziție rezultatul discutat la punctul (i) mai înainte (vezi pagina 163), care deschide posibilitatea de a pune incompletitudinea lui VB în perspectiva corectă. Derivarea secvenței **VB** $\vdash_2^p$ **MV** într-un sistem care definește o relație de consecință deductivă de ordinul al doilea pe o mulțime de formule indică faptul că explicația de ordinul al doilea a fenomenului incompletitudinii modale nu este aceea că nu există nici un sistem de ordinul al doilea S^2 în care

$$\Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B) \nvdash_{S2} \Diamond\Box A \vee \Box A,$$

deoarece un astfel de sistem în care secvența **este** demonstrabilă există de fapt. Mai degrabă, semnificația incompletitudinii lui VB, așa cum emerge aceasta din abordarea de ordinul al doilea pe care o urmărim aici, este aceea că relația de consecință deductivă $\vdash_K$ a logicii modale K, în care studiem teorii modale precum VB, are o putere expresivă mai slabă decât relația de consecință deductivă de ordinul al doilea $\vdash_2^p$. Pentru a face precisă această idee avem nevoie de următoarea noțiune de relație

de consecință deductivă care este o *extindere conservatoare* a unei alte relații de consecință deductivă. Astfel,

Fie $\mathcal{L}$ și $\mathcal{L}^*$ două limbaje și fie T (de la 'traducere') o funcție T: $\mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L}^*$, de la propozițiile lui $\mathcal{L}$ în propozițiile lui $\mathcal{L}^*$. Atunci $\vdash^*$ este o relație de $\mathcal{L}^*$-consecință care se spune că este o *extindere conservatoare* a unei relații de $\mathcal{L}$-consecință $\vdash$, relativ la T, dacă următoarea relație se obține pentru fiecare mulțime de $\mathcal{L}$-propoziții Σ și fiecare $\mathcal{L}$-propoziție σ

$T(\Sigma) \vdash^* T(\sigma)$ numai dacă $\Sigma \vdash \sigma$.

Cu alte cuvinte, o relație de consecință deductivă între propozițiile unui limbaj $\mathcal{L}^*$ este o extindere conservatoare a unei relații de consecință deductivă între propozițiile unui alt limbaj $\mathcal{L}$, dacă o secvență deductivă care este traducerea unei secvențe din limbajul originar $\mathcal{L}$ în limbajul $\mathcal{L}^*$ nu poate fi demonstrată în limbajul $\mathcal{L}^*$ dacă secvența nu este demonstrabilă în limbajul originar $\mathcal{L}$.

Folosind acum această noțiune de extindere conservatoare, putem face precisă ideea incompletitudinii sistemului VB, ca o manifestare a incompletitudinii logicii de ordinul al doilea. Am demonstrat înainte că în cazul modal

(A) **VB** $\vdash_K$ **MV**

iar în acest capitol tocmai am demonstrat că

(B) *todi*[**VB**] $\vdash_2^p$ *todi*[**MV**].

Totuși, *todi*[**VB**] și *todi*[**MV**] sunt traduceri ale lui **VB** și respectiv **MV** din LLMP în LLOD, ceea ce înseamnă că *todi* joacă aici rolul pe care funcția T îl joacă în definiția conceptului de relație de consecință deductivă care este o *extindere conservatoare*,

într-un limbaj, a unei alte relații de consecință deductivă, din limbajul originar. Prin urmare, luată ca întreg, secvența

$$todi[\mathbf{VB}] \vdash_2^p todi[\mathbf{MV}]$$

este o traducere în LLOD, potrivit funcției de traducere T, a secvenței

$$\mathbf{VB} \vdash_K \mathbf{MV}$$

din limbajul originar al logicii modale a propozițiilor.

Totuși, așa cum indică (B) și (A) de mai sus, secvența

$$todi[\mathbf{VB}] \vdash todi[\mathbf{MV}]$$

este demonstrabilă într-un sistem de ordinul al doilea predicativ monadic, în timp ce seecvența a cărei traducere *este această* secvență de mai sus, adică

$$\mathbf{VB} \vdash \mathbf{MV}$$

nu este demonstrabilă în sistemul K; altfel spus, **nu** este demonstrabilă în logica modală – mai slabă decât sistemul de ordinul al doilea – a oricărei teorii modale.

Potrivit definiției date mai sus extinderii conservatoare, acest rezultat, așadar, face din relația de consecință în LLOD $\vdash_2^p$ o extindere *non*-conservatoare a relației de consecință în LLMP $\vdash_K$. De unde decurge ideea importantă că relația de consecință deductivă de ordinul al doilea predicativă în LLOD este mai puternică decât relația de consecință deductivă modală în LLMP. Cu alte cuvinte, rezultatul considerat aici indică faptul că există o secvență al cărei adevăr poate fi exprimat în LLOD, în timp ce traducerea acesteia în LLMP nu reușește să exprime o secvență adevărată. Cu privire la acest aspect, cel puțin, puterea expresivă a LLOD pare să fie mai mare decât puterea expresivă a LLMP.

Dar atunci, problema naturală care se ridică este cum putem da seamă de această putere expresivă a LLOD, care este mai mare decât aceea a LLMP. O examinare atentă a demonstrației date secvenței relevante pentru această chestiune, anume

(B) $todi[\mathbf{VB}] \vdash_2'' todi[\mathbf{MV}]$,

indică faptul că manevra crucială care produce derivarea de ordinul al doilea a lui (B) constă în substituirea formulelor de ordinul întâi, care conțin o variabilă liberă, cu variabile de ordinul al doilea, în aplicații ale regulii $\exists^2$I, manevră urmată de trei aplicații succesive ale regulii $\exists^2$E care încheie demonstrația.

Acum, întrucât faptul acesta – şi anume de a fi posibil să substituim oricare formulă de ordinul întâi, care conține o variabilă liberă, cu variabile de ordinul al doilea, sau, în mod alternativ, să substituim o variabilă de ordinul al doilea cu o formulă de ordinul întâi, care conține o variabilă liberă, în cadrul aplicărilor regulilor de inferență pentru cuantorii de ordinul al doilea – este propriu LLOD, în timp ce manevra respectivă nu poate fi executată în LLMP, avem aici o imagine clară a ceea ce este implicat în această putere expresivă superioară a LLOD față de LLMP.

Într-adevăr, aşa cum am indicat mai sus, în demonstrația lui (B) ne folosim în mod crucial de substituția unei anumite formule de ordinul întâi, care conține o variabilă liberă, cu o variabilă de ordinul al doilea relavantă pentru o aplicație a regulii $\exists^2$I. Totuşi, această mişcare nu este întotdeauna fezabilă în cazul modal, cum ar fi de pildă acel caz care este răspunzător pentru

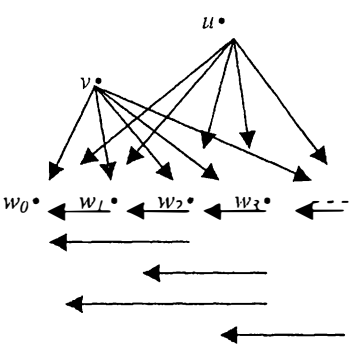
(A) $\mathbf{VB} \nvdash_K \mathbf{MV}$.

Astfel, este clar că trebuie să existe interpretări pentru LLMP, astfel încât cadrul fiecărei interpretări $\mathcal{I}$ este definibil în limbajul de ordinul întâi, dar cu toate acestea

mulțimea de lumi W a interpretării $\mathcal{I}$ nu este mulțimea mundană a nici unei propoziții modale.

Pentru a da un exemplu de astfel de caz, să considerăm următorul cadru tranzitiv care este reprezentat în imaginea de mai jos. Acesta este rezultatul unei modificări a cadrului recesiv pe care l-am folosit pentru a demonstra incompletitudinea sistemului VB.

Acum, în fiecare model tranzitiv $\mathcal{M}$ bazat pe cadrul de mai jos, u și v pot să vadă aceleași lumi, adică pe fiecare $w_i \in W$, $0 \leq i \leq \infty$, și pot fi văzute de către aceleași lumi, adică de nici una. Ideea principală este că dacă pentru fiecare propoziție atomară $\pi_i \in$ LLMP u este în mulțimea mundană din $\mathcal{M}$ a lui π_i ddacă v este în mulțimea mundană din $\mathcal{M}$ a lui π_i, atunci nici o propoziție modală care o conține pe π_i nu poate să aibă $W_{\mathcal{M}} - \{u\}$ sau $W_{\mathcal{M}} - \{v\}$ drept mulțime mundană a sa. Aceasta revine la a spune că în 'aranjamentul' prezentat în acest mediu modal, judecata $W_{\mathcal{M}} - \{u\}$, sau judecata $W_{\mathcal{M}} - \{v\}$ sunt inexprimabile de către oricare propoziție din LLMP.



Să arătăm acum că lucrurile stau așa. Trebuie să luăm în considerare două formule, care conțin o literă-propoziție π_i, al căror principal conector este operatorul

posibilității și respectiv acela al necesității. Pentru a începe, fie π_i litera-propoziție 'A'. Fie apoi $\mathcal{M}$ un model pentru limbajul {A}, model care este bazat pe cadrul tranzitiv $\mathcal{F}$ de mai sus, și stipulăm ca modelul să fie definit potrivit ipotezei că u în $\mathcal{M}$ este în mulțimea mundană a lui 'A' ddacă v în $\mathcal{M}$ este în mulțimea mundană a lui 'A'. Astfel,

$(\mathcal{M}, u) \models$ A ddacă $(\mathcal{M}, v) \models$ A.

Apoi, pentru '◇A' avem următoarele două cazuri:

Cazul 1°: $w_i[\mathrm{A}] = \bot$, $(\forall i)\ 0 \leq i < \infty$. Atunci $v[\Diamond \mathrm{A}] = \bot$, $u[\Diamond \mathrm{A}] = \bot$, și $w_i[\Diamond \mathrm{A}] = \bot$, $(\forall i)\ 0 \leq i < \infty$. Așadar, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \models \Diamond \mathrm{A}\} = \varnothing$. Dar $\varnothing \neq W - \{u\}$ și $\varnothing \neq W - \{v\}$ și prin urmare nici $W - \{u\}$ și nici $W - \{v\}$ nu sunt în mulțimea mundană a lui '◇A'.

Cazul 2°: $w_j[\mathrm{A}] = \top$, pentru cel puțin un j, $0 \leq j < \infty$.

Cazul 2°.1: Fie $j = 0$. Atunci $v[\Diamond \mathrm{A}] = \top$, $u[\Diamond \mathrm{A}] = \top$, $w_i[\Diamond \mathrm{A}] = \top$, $(\forall i)\ 0 < i < \infty$, și $w_0[\Diamond \mathrm{A}] = \bot$. Astfel, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \models \Diamond \mathrm{A}\} = W - \{w_0\}$ și din nou $W - \{w_0\} \neq W - \{u\}$ și $W - \{w_0\} \neq W - \{v\}$. Așadar nici în acest caz $W - \{u\}$ sau $W - \{v\}$ nu sunt în mulțimea mundană a lui '◇A'.

Cazul 2°.2: Fie $j > 0$, și $j = k$, pentru un $k \in \mathbb{N}$. Atunci $v[\Diamond \mathrm{A}] = \top$, $u[\Diamond \mathrm{A}] = \top$, $w_{k+n}[\Diamond \mathrm{A}] = \top$, unde $n > 1$. Pe de altă parte, $w_0[\Diamond \mathrm{A}] = \bot$, ..., $w_k[\Diamond \mathrm{A}] = \bot$. Așadar, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \models \Diamond \mathrm{A}\} = W - \{w_0, w_1, \ldots, w_k\}$. Dar $W - \{w_0, w_1, \ldots, w_k\} \neq W - \{u\}$ și $W - \{w_0, w_1, \ldots, w_k\} \neq W - \{v\}$. Prin urmare, din nou nici $W - \{u\}$ și nici $W - \{v\}$ nu sunt în mulțimea mundană a lui '◇A'.

Să considerăm acum cele două cazuri pentru '$\Box$A':

Cazul $1^{\Box}$: $w_i[A] = \top$, $(\forall i)\ 0 \leq i < \infty$. Atunci $v[\Box A] = \top$, $u[\Box A] = \top$, şi $w_i[\Box A] = \top$, $(\forall i)\ 0 \leq i < \infty$. Astfel, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box A\} = W$. Dar $W \neq W - \{u\}$ şi $W \neq W - \{v\}$ şi astfel nici $W - \{u\}$ şi nici $W - \{v\}$ nu sunt în mulțimea mundană a lui '$\Box$A'.

Cazul $2^{\Box}$: $w_j[A] = \bot$, pentru cel puțin un j, $0 \leq j < \infty$.

Cazul $2^{\Box}$.1: Fie $j = 0$. Atunci $v[\Box A] = \bot$, $u[\Box A] = \bot$, $w_i[\Box A] = \bot$, $(\forall i)\ 0 < i < \infty$, şi $w_0[\Box A] = \top$. Aşadar, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box A\} = \{w_0\}$. Dar $\{w_0\} \neq W - \{u\}$ şi $\{w_0\} \neq W - \{v\}$. Aşadar nici $W - \{u\}$ şi nici $W - \{v\}$ nu sunt în mulțimea mundană a lui '$\Box$A'.

Cazul $2^{\Box}$.2: Fie $j > 0$, şi $j = k$, pentru un $k \in \mathbb{N}$. Atunci $v[\Box A] = \bot$, $u[\Box A] = \bot$, $w_{k+n}[\Box A] = \bot$, unde $n > 1$. Pe de altă parte, $w_0[\Box A] = \top$, ..., $w_k[\Box A] = \top$. Astfel, $\{w \in W: (\mathcal{M}, w) \vDash \Box A\} = \{w_0, w_1, \ldots, w_k\}$. Totuşi, $\{w_0, w_1, \ldots, w_k\} \neq W - \{u\}$ şi $\{w_0, w_1, \ldots, w_k\} \neq W - \{v\}$. Prin urmare, din nou, nici $W - \{u\}$ şi nici $W - \{v\}$ nu sunt în mulțimea mundană a lui '$\Box$A'.

Să rezumăm acest rezultat: am arătat că într-un model $\mathcal{M}$ bazat pe cadrul tranzitiv $\mathcal{F}$ de la pagina 183, dacă lumea u este în mulțimea mundană a unei litere-propoziție π_i ddacă lumea v este în mulțimea mundană a lui π_i, atunci mulțimea mundană a oricărei propoziții modale care conține litera-propoziție π_i ca pe o parte componentă nu poate să fie nici mulțimea de lumi (judecata) $W_{\mathcal{M}} - \{u\}$ şi nici mulțimea de lumi (judecata) $W_{\mathcal{M}} - \{v\}$.

Cu toate acestea, dimpotrivă, '_ ≠ u' şi '_ ≠ v' sunt formule de ordinul întâi care sunt satisfăcute de către toţi membrii lui $W_{\mathcal{M}} - \{u\}$ şi respectiv $W_{\mathcal{M}} - \{v\}$, şi numai de către aceştia. Cu alte cuvinte, în LLOD există formule care pot exprima ceva, anume judecata $W_{\mathcal{M}} - \{u\}$ sau judecata $W_{\mathcal{M}} - \{v\}$, pe care nici o formulă din LLMP nu le poate exprima.

Mai general, morala globală este aceea că sistemul VB este necaracterizabil datorită lipsei de putere de exprimare a LLMP, comparativ cu puterea de exprimare a LLOD. Astfel, aşa cum arată argumentul elaborat în acest capitol, putem face raţionamente în logica de ordinul al doilea predicativă cu formule pe care LLMP nu are nici o putere să le exprime. Aceasta este principala raţiune a faptului că secvenţa

(B) *todi*[**VB**] $\vdash_2^p$ *todi*[**MV**]

este **demonstrabilă** în logica de ordinul al doilea, în timp ce versiunea sa modală, anume

(A) **VB** $\vdash_K$ **MV**

nu este demonstrabilă modal.

Capitolul 4. Este logica de ordinul al doilea o *logică*?

Introducerea logicii de ordinul al doilea în țesătura principalului argument al acestei lucrări ridică unele chestiuni controversabile, ale căror temeiuri cer o elucidare filosofică. În acest ultim capitol, încerc să pregătesc terenul pentru această examinare.

Fără îndoială că motivația tranziției de la logica de ordinul întâi la logica de ordinul al doilea, ca şi rezultatele la care contribuie această trecere, pot fi privite şi evaluate din perspective diferite. Să notăm succint că există diferite unghiuri de abordare a acestei chestiuni, care sunt foarte promițătoare pentru un tablou filosofic, cum ar fi punctul de vedere logic, matematic, lingvistic şi cel filosofic.[1]

Din perspectivă *logică*, există tendința de a 'degrada' logica de ordinul al doilea, sau cel puțin de a prefera logica de ordinul întâi, datorită comportamentului regulat al metateoriei celei din urmă, prin contrast cu caracterul mai 'neîmblânzit' al metateoriei celei dintâi. (Să ne amintim lista 'neajunsurilor' logicii de ordinul al doilea – lipsa metateoremelor familiare şi utile – care a fost întocmită în capitolul anterior.) Totuşi, acest aspect este departe de a fi concluziv.

Dimpotrivă, el dă naştere unei dileme, deoarece bine-cunoscutele rezultate care caracterizează logica de ordinul întâi şi eşuează în logica de ordinul al doilea nu pot fi evaluate într-un mod univoc. Interpretarea lor este o chestiune de situare şi de perspectivă, aidoma aceleia în care privim, într-un anumit context, la un pahar de apă:

[1] Cf. J. F. A. K. Van Benthem, 'Tense Logic, Second-Order Logic, and Natural Language', în Uwe Mönnich, ed., *Aspects of Philosophical Logic. Some Logical Forays into Central Notions of Linguistics and Philosophy*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht Holland, 1981, pg. 1-20.

este acesta pe jumătate plin, sau pe jumătate gol? Astfel, este obținerea teoremei Löwenheim-Skolem în logica de ordinul întâi punctul forte al acestei logici, întrucât, așa cum interpretează Quine lucrurile,[2] faptul că teorema Löwenheim-Skolem se obține în logica de ordinul întâi înseamnă că abordarea model-teoretică și cea substituțională a validității logice revin la unul și același lucru? Sau este mai degrabă o slăbiciune a acestei logici? Deoarece logica de ordinul întâi nu poate face o distincție, pe care logica de ordinul al doilea o poate face, între mărimi infinite care au cardinali diferiți. De asemenea, ar trebui să aclamăm compactitatea semanticii pentru limbajul logicii de ordinul întâi (LLOI) pentru valoarea sa autentică și rolul pe care-l joacă în argumente model-teoretice? Sau ar trebui, dimpotrivă, să deplângem slăbiciunea cu care împovărează orice limbaj de ordinul întâi, slăbiciune care constă în imposibilitatea de a exprima într-un astfel de limbaj un concept atât de util și de 'simplu' precum cel de finitudine. Sper că din caracterul fals-dramatic al acestor întrebări să apară cu evidență că ceea ce suntem îndreptățiți să căutam aici nu este în nici un caz un răspuns definitiv. Pentru că, în ultimă instanță, alegerea pe care o facem între cele două logici va depinde de problema pe care o abordăm într-un context de cercetare.

Din punct de vedere *matematic*, cuantificarea asupra tuturor submulțimilor unei mulțimi date și asupra tuturor funcțiilor, care este marca distinctivă a logicilor de ordinul al doilea și de ordine superioare, este foarte comună în practică. Așa încât s-ar părea că logica de ordinul al doilea, mai degrabă decât logica de ordinul întâi, ar capta spiritul real a ceea ce fac matematicienii. Totuși, putem rezista rațional acestei concluzii, iar dacă cineva ar îmbrățișa-o în mod pripit, am putea foarte ușor să ridicăm obiecția circularității. La urma urmei, există o tendință reprezentativă de a formula

[2] Cf. W. V. O. Quine, *Philosophy of Logic*, ediția a doua, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1970, 1986.

teoriile matematice în lexicon set-teoretic. Şi deşi această tendinţă nu contribuie cu nimic la eliminarea caracterului tipic de ordinul al doilea al anumitor concepte matematice, ea ne lasă totuşi într-o stare de indecizie în legătura cu chestiunea dacă ar trebui să folosim sau nu logica de ordinul al doilea pentru a da o descriere adecvată teoriei deducţiei care este încorporată într-o practică matematică.

Din punct de vedere *lingvistic*, putem construi un argument foarte puternic în sprijinul folosirii logicii de ordinul al doilea drept cel mai potrivit instrument pentru regimentarea limbajului natural. Există un argument convingător în favoarea acestei concepţii, care se prezintă, în mare, în felul următor: logica de ordinul al doilea şi, în general, logicile de ordin superior sunt *necesare* pentru a capta puterea expresivă a unui limbaj natural, care se relevă în cuantificarea asupra proprietăţilor (calităţilor). Chestiunea de examinat aici este dacă cea mai adecvată simbolizare – dacă există aşa ceva – a unui limbaj natural în limbajul logicii de ordinul al doilea cere semantica 'tare' (standard) pentru acest limbaj din urmă, impunând în felul acesta folosirea tuturor modelelor standard şi numai a lor. Sau poate, mai degrabă, ne-am putea folosi de semantica Henkin pentru limbajul logicii de ordinul al doilea, în măsura în care mulţimea tuturor submulţimilor definibile ale domeniului va fi suficientă pentru sarcina cuantificării asupra calităţilor pe care un vorbitor tipic le cuantifică de obicei.

Din punct de vedere *filosofic*, există bine-cunoscutele nemulţumiri ale lui Quine în privinţa logicii de ordinul al doilea.[3] Ele pot fi convenabil înglobate în două categorii distincte şi corelate: un argument set-teoretic şi un argument filosofic (ontologic) împotriva folosirii logicii de ordinul al doilea. Potrivit celui dintâi, ar fi mai bine să considerăm logica de ordinul al doilea drept teorie a mulţimilor, pentru că această interpretare este mai puţin înşelătoare decât aceea care socoteşte această

[3] *Ibidem*, pg. 66-68.

'logică' o *logică* autentică. Potrivit celui de-al doilea argument, logica de ordinul al doilea îi va angaja pe campionii ei față de existența proprietăților, adică a universaliilor – 'animale metafizice' a căror existență Quine o contestă – angajamentul nedorit fiind de neocolit tocmai datorită criteriului quinean al angajării ontologice, care ne spune că a fi este a fi valoarea unei variabile legate.[4]

Logica de ordinul al doilea joacă un rol crucial nu numai în explicarea incompletitudinii modale care a fost dezvoltată în această lucrare, ci şi în multe alte intreprinderi filosofice. Iată de ce merită să-i evaluăm calitățile şi reputația din perspectivă filosofică. Exact acesta este motivul pentru care chestiunea pe care vreau să o urmăresc aici va fi dacă, împotriva dezacordului lui Quine, susținerea conceptului că logica de ordinul al doilea este o logică reală sau autentică, pe picior de egalitate cu logica de ordinul întâi, are perspective bune.

Astfel, mai întâi voi examina nemulțumirile lui Quine în privința logicii de ordinul al doilea şi în mod deosebit concepția sa că logica de ordinul al doilea este 'teorie a mulțimilor în blană de oaie'.[5] Apoi voi introduce în țesătura argumentului meu filosofic considerații asupra felului în care G. Boolos apără această logică. Esența acestei apărări este că există o continuitate lină, mai degrabă decât o distincție netă, între logica de ordinul întâi şi logica de ordinul al doilea. Continuitatea este ilustrată prin existența unor concepte metalogice importante precum acelea de *interpretare*, *validitate*, *corectitudine* şi *decidabilitate*, care apar cu aceleaşi înțelesuri, sau cu deosebiri minore atât în logica de ordinul întâi cât şi în cea de ordinul al doilea.[6] Voi face după aceea o evaluare a felului în care concepția lui Quine rezistă în fața argumentelor lui Boolos.

---

[4] Cf. W. V. O. Quine, *From a Logical Point of View*, Harvard, Cambridge, 1953.

[5] Cf. W. V. O. Quine, *Philosophy of Logic*, 1970, pg. 66-68.

[6] Cf. G. Boolos On Second-Order Logic, *The Journal of Philosophy*, vol. LXXII, nr. 16, septembrie 18 (1975), pg. 509-527.

În mod special, miza tuturor acestor argumente este delimitarea unei poziții care poate fi înțeleasă pe baza răspunsurilor la următoarele întrebări. Dacă Quine ar avea dreptate, care ar fi relevanța criticii sale pentru șansele de a 'reduce' modalitățile la structuri de ordinul al doilea? Pe de altă parte, dacă ideea generală a lui Boolos ar fi bine întemeiată, atunci cum ar afecta aceasta înțelegerea noastră globală a argumentului central al acestei lucrări?

Împotriva poziției lui Quine, voi căuta să arăt că poate fi obținută o exonerare a logicii de ordinul al doilea, dacă se acordă atenția cuvenită distincției nete dintre conceptul logic sau (după cum l-am putea numi) cel fregean de mulțime, după care mulțimile au o structură booleană, și noțiunea iterativă de mulțime, după care mulțimile nu au o astfel de structură. Astfel, în măsura în care noțiunea logică de mulțime este o *noțiune logică* **legitimă**, ne-am putea aștepta să dăm o justificare bună logicii de ordinul al doilea în calitate de logică autentică.

Dar atunci, s-ar putea să existe unele temeiuri bune pentru a spune că atitudinea critică a lui Quine față de logica de ordinul al doilea nu discriminează suficient între două ținte, pe care el le consideră a fi una singură, și anume între logica de ordinul al doilea ca logică a mulțimilor în sensul logic al 'mulțimilor' și logica de ordinul al doilea ca logică a mulțimilor în sensul iterativ al 'mulțimilor'. Deoarece numai în sensul din urmă logica de ordinul al doilea poate fi interpretată legitim drept 'teorie a mulțimilor în blană de oaie', voi urmări să argumentez că obiecția ontologică principală a lui Quine împotriva interpretării logicii de ordinul al doilea se adresează, de fapt, numai conceptului iterativ de mulțime, care nu este o parte proprie a logicii. Potrivit acestei concepții despre mulțimi, teoria mulțimilor are într-adevar o 'ontologie copleșitoare' și cade în bătaia obiecțiilor lui Quine împotriva presupozițiilor ontologice substanțiale în logică. Pe de altă parte, concepția fregeană

despre mulțimi face să fie rezonabilă interpretarea conceptului ei central de mulțime în calitate de concept logic, epurând în felul acesta noțiunea de mulțime de orice implicații ontologice masive.

Dezacordurile lui Quine cu logica de ordinul al doilea

Să examinăm acum succint principalele obiecții ale lui Quine la adresa logicii de ordinul al doilea. În *Philosophy of Logic*, Quine creionează contrastul dintre două atitudini față de logica de ordinul al doilea şi deplânge existența acestora. Pe de o parte, există atitudinea logicianului confuz, care obliterează distincția dintre folosire şi menționare, iar pe de altă parte există atitudinea celui care face loc în ontologia sa atributelor şi care, drept urmare, nu găseşte nimic de obiectat în privința cuantificării asupra proprietăților.

Înțelegerea mea a chestiunii considerate aici este că pentru a da un sens criticii pe care o face Quine logicii de ordinul al doilea ne este de ajutor să pornim de la un rezumat succint al concepției sale despre ce este un idiom inteligibil al cuantificarii. În mare, criteriul quinean al cuantificării cu sens este că '[o] poziție care rezistă substitutivității identității nu poate fi cuantificată cu sens'.[7] Problema cuantificării are ramificații interesante în semantica şi metafizica modalităților, sau în semantica atribuirii de atitudini propoziționale. Merită să menționăm aici că W. V. O. Quine foloseşte acest criteriu atunci când respinge logica modală cuantificată (aşa-numitele 'modalități *de re*') şi cuantificarea în poziții care apar în cadrul contextelor atribuirilor de atitudini. Nu voi urmări această linie de argumentare aici.

[7] W. V. O. Quine, 'Reply to David Kaplan', în L. E. Hahn şi P. A. Schilpp, ed., *Philosophy of W. V. Quine*, LaSalle: Open Court, 1986, pg. 291.

Totuşi, în concepţia lui Quine, o anumită folosire a acestui criteriu al cuantificării cu sens este răspunzătoare pentru respingerea logicii de ordinul al doilea. Pentru a descifra mai departe concepţia lui Quine este nevoie să ne întrebăm ce genuri de itemi pot ocupa o poziţie care **nu** rezistă substitutivităţii, sau care este deschisă faţă de ea şi ce categorii de astfel de itemi **nu pot** ocupa o astfel de poziţie? Pentru ţelurile discuţiei noastre de aici este de ajuns să spunem că un nume (sau reprezentantul său formal, care este o constantă individuală) poate ocupa cu sens o poziţie care nu rezistă substituţiei, în timp ce un termen general (sau literă-predicat) nu poate.

Un pas mai departe va fi să spunem că un nume este un instrument al referinţei, în sensul că el se referă (în mod direct) la purtătorul (referentul) său, pe care-l etichetează, dar un termen general nu este un instrument al referinţei, deoarece, potrivit lui Quine, un termen general exprimă o proprietate şi are drept extensiune clasa acelor obiecte care satisfac proprietatea. Cu toate acestea, un termen general nu este nici nume al proprietăţii pe care o exprimă şi nici nu este nume al clasei de obiecte care stau sub acel termen.

Acum, ideea crucială este că o cuantificare cu sens merge mână în mână cu poziţii care nu rezistă substituţiei identicilor. Aceasta înseamnă că cuantificarea este în mod esenţial legată de acele categorii, precum numele, care sunt mijloace ale referinţei (directe). Cu alte cuvinte, dacă un item nu este o expresie referenţială, el nu poate fi folosit într-o aplicaţie a unei reguli de inferenţă pentru cuantificatori, cum ar fi introducerea (sau generalizarea) existenţialului. Dar, aşa cum s-a arătat pe scurt mai înainte, un termen general (literă-predicat) nu este o expresie referenţială şi prin urmare cuantificarea în poziţii care pot fi ocupate de către predicate nu are ca rezultat un idiom cu sens al cuantificării.

Cum se leagă toată această discuție de obiecțiile lui Quine împotriva logicii de ordinul al doilea? Legătura este evidentă. Marca logicii de ordinul al doilea este cuantificarea asupra proprietăților, care, după cum știm, sunt exprimate prin predicate *n*-adice. Astfel, pentru a obține un limbaj care este esențialmente de ordinul al doilea, trebuie să se cuantifice în poziții pe care le ocupă predicatele. Dar aceste poziții nu sunt poziții care să fie ocupate de către itemi care sunt mijloace ale referinței, și prin urmare nu sunt acele genuri de poziții care nu rezistă substitutivității identicilor. Așadar, pozițiile-predicat sunt poziții care rezistă substitutivității identității și, potrivit criteriului quinean al cuantificării cu sens, nu se poate cuantifica într-o poziție-predicat.[8] Așadar, fie logica de ordinul al doilea este lipsită de sens, sau altfel, dacă transmite o anumită informație cu sens, atunci aceasta se datorează faptului, dacă este un fapt, că logica de ordinul al doilea parazitează pe idiomul cu sens care este, de fapt, limbajul teoriei mulțimilor.

Cum să explicăm atunci faptul că autori proeminenți au îmbrățișat logica de ordinul al doilea? Iată acum propria versiune a lui Quine, din care apar în prim plan cu putere dezacordurile sale cu logica de ordinul al doilea. Incapacitatea de a vedea că logica de ordinul al doilea este teorie a mulțimilor, sau, pentru a folosi modul mai părtinitor al lui Quine de a descrie această chestiune, tendința de a concepe teoria mulțimilor drept logică, se datorează eșecului de a recunoaște că apartenența și predicația nu revin la unul și același lucru. Această distincție este obliterată de către noțiunea de atribuire de atribute, care, funcționând ca o noțiune intermediară între

[8] Totuși, ce este greșit, dacă *este* ceva greșit, în următoarea inferență simplă:
Socrate este înțelept & Platon este înțelept.
∴ Există ceva, care sunt atât Socrate cât și Platon.
Nu cuantificăm aici în poziții ocupate de predicate? Este ceva greșit cu această inferență? Dacă da, ce anume este greșit?

apartenență şi predicație, dă naştere 'iluziei de continuitate'[9] între logică şi teoria mulțimilor.

După Quine, răul aici, ca şi în multe alte locuri în filosofie, este făcut de către eşecul de a recunoaşte într-un mod adecvat distincția *folosire – menționare*. Astfel, în propoziția deschisă 'F*x*', 'F' trebuie interpretată drept literă schematică (simulare) care semnalează o poziție-predicat. 'F*x*' ca întreg este o schemă care simulează o propoziție şi părțile sale. Aceasta revine la a spune că 'F' în 'F*x*' nu este o expresie referențială şi în mod special, prin folosirea sa, 'noi nu ne *referim* la predicate sau la alte şiruri de semne şi nici nu ne referim la atribute sau mulțimi.'[10]

Totuşi, unii au adoptat linia opusă şi au considerat că 'F' nu este o literă schematică, ci o variabilă care parcurge mulțimea atributelor (sau a proprietăților). În mod corespunzător, ei au citit pe 'F*x*' ca având acelaşi înțeles pe care propoziția deschisă '*x* are F' îl are într-o atribuire corespunzătoare a unui atribut (proprietăți) pentru variabila 'F' şi a unui obiect individual pentru variabila-individ '*x*'.

Deci, lipsa unei distincții riguroase între o literă schematică (simulare) şi o variabilă-predicat şi necunoaşterea acestei distincții i-au făcut pe unii să creadă în mod greşit că se poate cuantifica cu sens într-o poziție-predicat. Alții, totuşi, au îmbrățişat această poziție pentru că au socotit că nu este nimic greşit dacă se acceptă existența atributelor.

Ignorarea distincției *folosire – menționare*, distincție pe care Quine a capitalizat-o în intreaga sa filosofie, este socotită punctul de pornire al confuziei care ascunde faptul că logica de ordinul al doilea este teorie a mulțimilor.

Modul specific în care apare confuzia dintre semn şi obiect în acest context implică statutul simbolului 'F' în propoziția deschisă 'F*x*'. După cum am remarcat

---

[9] W. V. O. Quine, *Philosophy of Logic*, 1970, pg. 66.
[10] *Ibidem*, pg. 66.

deja, felul principial în care descrie Quine formalismul este să spună că 'F' este o literă schematică, sau ceva care ține locul unei expresii-predicat, adică o literă '*care stă în locul unui* predicat nespecificat'. Sursa întregii confuzii este să vezi pe 'F', în schimb, ca pe o *variabilă*-predicat susceptibilă de a fi legată de către un cuantificator (de ordinul al doilea), sau, după cum zice Quine, ca pe o expresie '*care numește* un predicat nespecificat'.[11] Astfel, 'F' este socotit o locuțiune substantivală și nu este decât un pas foarte mic pentru a completa confuzia prin considerarea lui 'F' drept atribut.

Doi suporteri diferiți ai logicii de ordinul al doilea pot îmbrățișa atitudinea descrisă mai sus. Unul este logicianul perplex, căruia nu-i pasă prea mult de distincția dintre un obiect și semnul său, iar Quine identifică pe acest tip de logician cu Russell. Celălalt este logicianul care nu are nici o rezervă față de atribute și potrivit lui Quine, această persoană este identificabilă cu Frege.

Întreaga chestiune aici gravitează în jurul cuantificatorilor '$(\forall F)$' și '$(\exists F)$', după cum am spus foarte clar la începutul schiței mele a argumentelor lui Quine împotriva logicii de ordinul al doilea. Așadar, să privim cu atentie la ce spune de fapt Quine atunci când acuză folosirea liberă a cuantificării asupra proprietăților și să abordăm obiecțiile sale în mod amănunțit.

Primul lucru pe care merită să-l notăm cu privire la concepția lui Quine despre cuantificare este că nu se poate cuantifica asupra unei poziții dintr-o propoziție deschisă, dacă itemul lingvistic care poate ocupa în mod corect acea poziție nu este un instrument referențial, așa cum este de pildă o locuțiune substantivală. Din aceasta decurge că dacă îl lăsăm pe 'F', în contextul 'Fx', să stea în domeniul unui cuantificator, de exemplu în propoziția deschisă '$(\exists F)Fx$', ceea ce facem de fapt este să

[11] *Ibidem*, pg. 66.

considerăm predicatele drept nume ale anumitor entități, tratând prin aceasta pe 'F' ca pe o expresie substantivală.[12]

Totuşi, este important să recunoaştem că există două modalități diferite în care se poate produce această cuantificare asupra predicatelor. Există aceia care vor să cuantifice fără nici o rezervă asupra atributelor sau proprietăților şi îmbrățişează logica de ordinul al doilea tocmai pentru că această logică le va permite să considere că atributele sunt lucruri pe care le numesc literele-predicat, sau că sunt valorile variabilelor predicat în atribuiri corespunzătoare. Şi există, de asemenea, aceia, mai derutați, care ar spune că valorile pe care le iau literele-predicat sunt chiar predicatele, în felul acesta nemaiputând 'să aprecieze diferența dintre *simularea* schematică a predicatelor şi discursul cuantificațional *despre* predicate, ca să nu mai menționăm discursul despre atribute.'[13]

Acum, în timp ce Quine poate să se dispenseze cu uşurință de logicianul derutat, el trebuie să fie mai prudent în privința atitudinii celuilalt logician, care este conştient de poziția sa şi nu are nici o rezervă față de atribute şi proprietăți. Într-adevar, Quine spune că până şi linia de argumentare a acestui logician din urmă este problematică. De aceea Quine respinge atât versiunea acestei atitudini, care este mai înclinată către intensionalism, cât şi varianta extensionalistă a ei.

Cu privire la prima atitudine, care acceptă deschis atributele, motivația lui Quine de a o respinge are un substrat ontologic, care este acela că atributele, ca şi judecățile (propositions), sunt greu de identificat. De fapt, cele două 'entități' sunt

[12] Iată aici conținutul acestei obiecții în propriile cuvinte ale lui Quine: 'A pune o literă-predicat "F" într-un cuantificator, aşadar, înseamnă a trata dintr-o dată pozițiile predicat drept poziții nominale şi deci a trata predicatele drept nume ale unor entități de un anumit gen.' (Quine, *Philosophy of Logic*, Harvard, 1970, pg. 66-67)

[13] *Ibid.*, pg. 67.

oarecum corelate, pentru că 'atributele sunt față de predicate, sau față de propozițiile deschise, ceea ce sunt judecățile față de propozițiile închise'.[14]

Mai mult, lucrurile ar fi mai simple şi mai clare, dacă am alege în schimb să vorbim limbajul mulțimilor. Deoarece spre deosebire de lipsa de adecvare a individuării atributelor, mulțimile sunt bine identificate de către *legea extensionalității* şi sunt determinate direct de către obiecte, care satisfac propoziții deschise.

Totuşi, Quine deplânge chiar pe aceia care gândesc că literele-predicat pot fi folosite drept variabile-predicat cuantificate (de ordinul al doilea) ale căror valori sunt submulțimi ale mulțimii putere a domeniului unei interpretări. În consecință, Quine respinge chiar această atitudine cu o înclinație mai extensionalistă față de atribute, pentru că el crede că este greşită din două motive. Mai întâi, predicatele exprimă proprietăți, au atribute drept 'intensiuni' sau drept înțelesuri ale lor ('sau le-ar avea, dacă ar exista atribute'[15]) şi au mulțimi drept extensiuni ale lor. În al doilea rând, predicatele nu sunt nume nici ale atributelor şi nici ale mulțimilor.

Cu toate acestea, singurele variabile asupra cărora are sens să se cuantifice trebuie să ocupe poziții pe care le pot ocupa numele. Din moment ce predicatele nu numesc nimic, unica inferență rezonabilă care poate fi făcută este următoarea: cuantificarea asupra variabilelor-predicat, cu alte cuvinte marca logicii de ordinul al doilea, este concepută greşit.

La un nivel mai lingvistic, acela care susține atributele cade pradă confuziei, dacă citeşte pe 'Fx' drept 'x are F', cu 'F' într-o poziție pentru nume. De asemenea şi pentru acela care admite mulțimi drept valori ale variabilelor cuantificabile. Pentru a preveni confuzia, sfatul lui Quine pentru cel dintâi este să folosească variabile distincte pentru atribute. Sfatul său pentru cel de-al doilea este să comute explicit

[14] *Ibid.*, pg. 67.
[15] *Ibid.*, pg. 67.

idiomul său la limbajul set-teoretic şi să folosească '$x \in y$', sau dacă preferă alte variabile pentru mulţimi, '$x \in \alpha$', în locul lui 'Fx'. Totuşi, ceea ce nu reuşesc să recunoască într-un mod adecvat nici prietenul atributelor şi nici logicianul derutat este distincţia dintre o variabilă care ia o valoare şi o literă schematică ce face obiectul unei substituţii. Iar Quine este cât se poate de limpede în privinţa aceasta: 'Litera-predicat "*F*", ca şi litera-propoziţie "*p*", nu este câtuşi de puţin o variabilă care ia valori, ci doar o literă schematică ce poate face obiectul unei substituţii.'[16]

Mai general, la nivel filosofic, Quine consideră că originea confuziei care i-a făcut pe oameni să creadă că teoria mulţimilor şi matematica în general au fost derivate din logică se găseşte la Russell. Russell a folosit conceptul de 'funcţie propoziţională', pe care l-a împrumutat de la Frege, într-un mod ambiguu, pentru a vorbi atât despre atribute cât şi despre predicate. În plus, Russell a favorizat cuantificarea asupra atributelor şi a introdus cuantificarea asupra mulţimilor prin intermediul unei definiţii contextuale. Ce motivaţie ar putea avea preferinţa lui Russell pentru atribute? Iată răspunsul lui Quine: 'A fost o situaţie în care nu s-a apreciat unde logica elementară lasă loc discursului despre atribute, în simularea sa inocentă a predicatelor.'[17]

Last but not least, citind cu atenţie ultimul paragraf al secţiunii din *Philosophy of Logic* al lui Quine, secţiune care este relevantă pentru discuţia pe care o port aici, descoperim două alte motive pentru rezistenţa lui Quine faţă de logica de ordinul al doilea. Mai întâi, se pare că logica de ordinul al doilea, ca şi teoria naivă a mulţimilor, este ameninţată de paradoxul lui Russell. În al doilea rând, logica de ordinul al doilea, spre deosebire de teoria mulţimilor, nu este atât de candidă în ceea ce priveşte supoziţiile sale existenţiale vaste, care nu sunt potrivite pentru o logică autentică. Cu

[16] *Ibid.*, pg. 67.
[17] *Ibid.*, pg. 68.

toate acestea, Hilbert şi continuatorii săi au fondat o tradiţie care a gravitat în jurul construcţiei calculelor logice în care se cuantifică asupra variabilelor de ordin superior, ale căror domenii de valori sunt mulţimi.

Şi pentru a obţine o perspectivă corectă asupra a cât de înşelător din punct de vedere filosofic poate fi conceptul acestei tradiţii, Quine ne invită să considerăm următoarea ipoteză:

$(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow Fx)$.

Quine spune despre această ipoteză următoarele:

> Ea presupune o mulţime $\{x: Fx\}$ determinată de către o propoziţie deschisă în rolul lui 'Fx'. Aceasta este ipoteza centrală a teoriei mulţimilor şi este acea ipoteză care trebuie restrânsă într-un fel sau altul pentru a evita paradoxurile. Această ipoteză dispare din atenţia noastră în aşa-numitul calcul de ordin superior al predicatelor. Ceea ce se obţine este "$(\exists G)(\forall x)(Gx \leftrightarrow Fx)$", care decurge în mod evident din banalitatea autentic logică "$(\forall x)(Fx \leftrightarrow Fx)$" printr-o inferenţă logică elementară.[18]

Este evident că W. V. O. Quine vrea ca noi să fim conştienţi de două lucruri. Mai întâi, dacă alegem să prezentăm teoria mulţimilor în limbajul unui calcul de ordinul al doilea ale cărui variabile parcurg mulţimi, atunci teoria mulţimilor însăşi va arăta înşelător de asemănătoare logicii. Totuşi, aceasta este departe de o demonstraţie serioasă a principalei idei a logicismului, şi anume aceea că teoria mulţimilor şi mai în general matematica pot fi derivate doar din logică. În al doilea rând, spre deosebire de teoria (naivă a) mulţimilor, care poartă în palmă supoziţiile sale ontologice şi se confruntă cu pericolele inconsistenţei, logica de ordinul al doilea nu este de-a dreptul inconsistentă şi, bine înţeles, Quine nici nu spune că este[19], dar ascunde 'supoziţiile existenţiale copleşitoare' ale teoriei mulţimilor în procesul de trecere de la litere-predicat schematice la variabile cuantificabile pentru mulţimi. Şi sunt într-adevăr 'supoziţii

---

[18] *Ibid.*, pg. 68.

[19] Astfel, Quine spune cu claritate: 'Nu există nici un risc actual de obţinere a unui paradox atâta timp cât domeniile valorilor lui "x" şi "G" [în propoziţia de ordinul al doilea care corespunde ipotezei centrale a teoriei mulţimilor] sunt ţinute separat ...' (*Ibid.*, pg. 68.)

existențiale copleșitoare', după cum ne arată validitatea formulei de ordinul al doilea, aparent contradictorie, '$(\exists X)(\forall x)(Xx \leftrightarrow x \notin x)$, care este validă în condițiile în care domeniile lui 'X' și 'x' sunt ținute separat.

Înainte de a continua cu discuția unei posibile rute de evitare a argumentelor puternice ale lui Quine, cred că merită să fac următoarea remarcă. Este un lucru să spunem, așa cum spune și Quine, că teoria mulțimilor nu este logică, și în particular logică de ordinul al doilea. (Și cu aceasta sunt de acord.) Cu toate acestea, este altceva să se folosească acest enunț pentru a infera, din susținerea acestei poziții, că logica de ordinul al doilea nu este logică.

Afirmația din urmă nu decurge din cea dintâi, dacă logica de ordinul al doilea și teoria mulțimilor nu sunt identice, sau poate dacă logica de ordinul al doilea nu este o teorie deghizată a mulțimilor, sau altfel zis logica de ordinul al doilea nu este o specie de teorie a mulțimilor. Totuși, cu privire la această chestiune, să mai notăm două lucruri. (i) Dacă ceea ce vrem să avem în vedere prin logica de ordinul al doilea este logica mulțimilor iterative, atunci ar fi mai bine să se folosească direct denumirea 'teoria mulțimilor' pentru acea 'logică'. (ii) Pe de altă parte, dacă intenția noastră este ca prin logica de ordinul al doilea să codificăm logica mulțimilor fregeene, atunci logica de ordinul al doilea este un gen de logică care are drept la existență de sine stătătoare. Sau cel puțin, acesta este felul în care vreau să argumentez.

Un argument pentru logica de ordinul al doilea

Scopul meu acum este să găsesc o cale de a demonta critica lui Quine la adresa logicii de ordinul al doilea. Strategia încercării mele este de a mă concentra, contrar felului în care vede Quine lucrurile, asupra **continuității** autentice dintre

logica de ordinul întâi şi cea de ordinul al doilea în privința chestiunilor metalogice. Apoi, pentru a face argumentul meu mai puternic şi mai plauzibil vreau să arăt că argumentele lui Quine pot fi slăbite, dacă există o cale convingătoare de a pune în lumină faptul că adevărata țintă a argumentelor sale este logica de ordinul al doilea, concepută ca o 'logică' a mulțimilor iterative. În sensul acesta se poate spune că suntem într-o poziție mai bună, dacă spunem direct că ceea ce facem atunci când avem de-a face cu mulțimi iterative este teoria mulțimilor. Dar dacă mulțimile despre care vorbim sunt domenii de discurs ale diferitelor interpretări, de ordinul întâi sau al doilea, pe care le parcurg variabile-indivizi şi variabile-predicat şi care sunt extensiuni ale conceptelor care sunt exprimate de către literele-predicat, atunci, în acel sens, logica (de ordinul al doilea a) acelor mulțimi fregeene este o logică autentică.

În mod corespunzator, voi discuta argumentele interesante ale lui Boolos în favoarea logicii de ordinul al doilea. Apoi, în secțiunea următoare a acestui capitol, voi face un mic ocol pentru a discuta distincția dintre concepția iterativă şi concepția fregeană despre mulțimi, iar în cele din urmă voi schița un argument personal, prin care urmăresc să arăt că logica mulțimilor fregeene, în calitatea sa de discurs de ordinul al doilea despre mulțimi, este îndreptățită la eticheta onorifică de 'logică'.

Fără îndoială, forța de persuasiune pe care o au observațiile critice ale lui Quine față de logica de ordinul al doilea depinde direct de două dintre opiniile sale referitoare la cuantificarea cu sens. Mai întâi, există ideea sa că numai poziții deschise față de substitutivitatea identicilor pot fi cuantificate. În al doilea rând, există concepția, care elimină cuantificarea asupra atributelor, că numai itemi direct referențiali, precum numele, pot să ocupe cu sens poziții care sunt deschise la substitutivitatea identicilor, permițând prin aceasta ca numai obiectele care sunt susceptibile de a fi numite să fie în domeniul unui cuantificator. Totuşi, potrivit

argumentului lui Quine, atributele nu sunt obiecte care pot fi numite de către predicate şi în consecinţă nu putem cuantifica cu sens asupra lor.

Boolos găseşte un *non-sequitur* în argumentul de mai sus.[20] Pentru că el consideră ca acelaşi gen de argument pe care-l foloseşte Quine pentru a arăta că '(∃F)' şi '(∀F)' nu au nici un sens, dacă nu suntem dispuşi să recunoaştem că atributele sunt entităţi care sunt numite de către predicate, poate fi reformulat pornind de la supoziţiile unor cuantificări extraordinare, cum ar fi '(∃F)(Aristotel F)' sau '(∃F)(17 F)'. Iar concluzia acestui argument adaptat, de tip quinean, ar fi foarte apropiată de concluzia propriului argument al lui Quine. Totuşi, această concluzie ar consta într-o idee nedorită, care ţine de cuantificările obişnuite şi de nume. Ideea este că

> a pune variabila 'x' într-un cuantificator, atunci, înseamnă a trata dintr-o dată poziţiile pentru nume ca poziţii pentru predicate şi deci a trata numele ca predicate cu extensiuni de un anumit gen. Cuantificatorul '($\exists x$)' sau '($\forall x$)' spune nu că unele sau toate numele sunt în cutare şi cutare fel, ci că unele sau toate extensiunile de genul acelora avute de către nume sunt în cutare şi cutare fel.[21]

Sursa acestui *non-sequitur* pare să fie atitudinea favorabilă a lui Quine de a generaliza o idee, care este valabilă atunci când lucrăm cu variabile-indivizi, precum 'x', la alte genuri de variabile şi în mod special la variabile-predicat, precum 'F'. Ideea aceasta este că în cazul unei cuantificări obişnuite o variabilă-individ apare numai în poziţii care pot fi ocupate de către nume şi nu de către predicate. Quine pare să fie angajat faţă de ideea că acelaşi lucru trebuie să fie valabil în legătură cu orice alt gen de variabile. Dar chiar dacă vom concede că are dreptate, atât timp cât ceea ce este în discuţie este cuantificarea obişnuită, această concesie nu este totuşi un temei suficient pentru a accepta ideea că acelaşi lucru este valabil şi în cazul cuantificării 'extraordinare'.

---

[20] Cf. G. Boolos On Second-Order Logic, *The Journal of Philosophy*, Vol. LXXII, nr. 16, septembrie 18 (1975), pg. 509-527.

[21] *Ibid.*, pg. 510.

Cu alte cuvinte, nu există un motiv evident pentru a considera că analiza preferată a cuantificării obişnuite **în termenii numelor şi a obiectelor numite** trebuie să prevaleze asupra analizei cuantificării atributelor. Pentru că după cum indică Boolos cu temei

A pune pe 'F' într-un cuantificator poate să însemne a trata pe 'F' ca având un *domeniu*, dar nu este necesar să însemne că tratăm poziţiile pentru predicate drept poziţii pentru nume şi nici a trata predicatele ca nume de vreun anumit fel. [...] ... nu suntem prin aceasta angajaţi faţă de vreo parafrază care conţine 'nume' (sau oricare dintre cognaţii săi), care urmăreşte să dea întelesul cuantificărilor noastre extraordinare. Poate că cineva ar putea să presupună că variabilele trebuie ca întotdeauna să *numească* obiectele din domeniul lor, fie chiar şi 'indefinit' sau 'temporar'. Totuşi, nu avem nici un motiv să nu considerăm că ar putea să existe un gen de variabilă, o variabilă-predicat, care parcurge obiectele din domeniul său (acestea vor fi extensiunile), dar care nu le *numeşte* 'indefinit' sau în vreun alt fel oarecare; mai degrabă, variabilele-predicat le vor *avea* pe aceste obiecte 'într-un mod indefinit', tot aşa precum predicatele (constantele) au extensiunile lor 'într-un mod definit'. Astfel de variabile nu ar fi nume de vreun fel oarecare, nici măcar nume 'indefinite', ci ar avea un domeniu care ar conţine acele obiecte (extensiuni) care ar putea fi avute de către predicate în poziţii-predicat.[22]

Dar nu ar intra în conflict această concepţie despre variabilele-predicat, care *au într-un mod indefinit* extensiuni, mai degrabă decât că *numesc într-un mod indefinit* obiectele din domeniul lor, cu o semantică adecvată pentru limbajul care conţine variabilele respective? Pentru că, la urma urmei, se acceptă îndeobşte că o explicaţie referenţială a condiţiilor de adevăr a propoziţiilor cere ca variabilele să fie precum numele, într-o atribuire corespunzătoare de obiecte faţă de variabile, care numesc indefinit obiectele din domeniul lor. Totuşi, în formularea semanticii corecte pentru acest limbaj, nimic nu depinde de considerarea variabilelor-predicat ca având un comportament similar numelor, care numesc indefinit obiectele din domeniul lor. Într-adevăr, variabile de orice gen trebuie să aibă domenii asociate care conţin obiecte corespunzătoare. Dar nu este necesar ca fiecare gen de variabilă să fie aidoma unui

[22] *Ibid.*, pg. 511.

nume care numeşte indefinit obiectele din domeniul său. În particular, după cum spune clar Boolos

'(∃F)' nu trebuie să fie considerat că spune că unele entităţi de genul acelora numite de către predicate sunt în felul cutare şi cutare; poate fi socotit că spune că unele entităţi (extensiuni) avute de către predicate conţin cutare şi cutare. Aşadar, unele variabile eligibile pentru cuantificare pot să ocupe foarte bine poziţii-predicat şi nu poziţii pentru nume. Şi a considera pe 'F*x*' că este adevărată dacă şi numai dacă acel ceva pe care-l numeşte '*x*' este în extensiunea lui 'F' nu ne angajează în nici un fel să presupunem că 'F' numeşte ceva.[23]

Atunci când încercăm să arbitrăm două poziţii care sunt divergente cu privire la chestiunea unde se plasează mai bine logica de ordinul al doilea, alături de teoria mulţimilor, sau alături de logica de ordinul întâi (ca o extindere a sa), cred ca nu este rezonabil să ne aşteptăm ca apărătorii uneia dintre poziţii, indiferent care ar fi aceea, să aibă dreptate absolută, în timp ce apărătorii celeilalte poziţii să fie în eroare absolută.

Mai degrabă cred că ar fi mai potrivit să spunem că date fiind anumite dovezi relevante, am face mai bine să plasăm logica de ordinul întâi într-un continuum cu teoria mulţimilor, sau, dimpotrivă, într-un continuum cu alte sisteme logice. Atunci, problema noastră va fi o chestiune de ierarhizare a importanţei teoretice a acelor dimensiuni de-a lungul cărora evaluăm comparativ teoria mulţimilor şi logica de ordinul al doilea, pe de o parte, şi logica de ordinul intâi şi (din nou) logica de ordinul al doilea, pe de altă parte.

Astfel, pentru a fi mai explicit în legătură cu ce am în minte aici, cred că dacă facem comparaţia numită în funcţie de dimensiunea presupoziţiilor ontologice (set-teoretice), atunci se poate accepta că logica de ordinul al doilea este mai apropiată de teoria mulţimilor decât de o logică 'banală'. Şi atunci se poate accepta cu uşurinţă poziţia lui Quine că limbajul logicii de ordinul al doilea poate să ascundă foarte bine

[23] *Ibid.*, pg. 511.

acel fapt, care este scos clar la lumină, dacă alegem să vorbim limbajul teoriei mulțimilor.

Pe de altă parte, dacă ceea ce este în joc sunt comparații de-a lungul altor dimensiuni, cum ar fi o interpretare standard[24] pentru limbajul logicii de ordinul al doilea, validitatea, implicația logică, corectitudinea, decidabilitatea, atunci diferențele dintre logica de ordinul al doilea și logica de ordinul întâi tind către zero, aceste concepte metalogice importante fiind virtual identice pentru ambele sisteme de logică. Este, atunci, foarte firesc să socotim că logica de ordinul al doilea este o logică autentică și nu o teorie deghizată a mulțimilor.

Prin urmare, opțiunea pe care o îmbrățișăm cu privire la chestiunea dacă este sau nu mai bine să considerăm logica de ordinul al doilea ca pe o logică, va depinde în cele din urmă de cât de multe presupoziții ontologice suntem gata să acceptăm într-un sistem de logică. Dacă nu ne deranjează prea tare un pic mai mult de ontologie decât în logica de ordinul întâi, atunci a pune logica de ordinul al doilea laolaltă cu orice altă logică 'banală', mai degrabă decât cu teoria mulțimilor, nu va fi o opțiune nerezonabilă pentru noi.

Există două întrebări simple, care ne vor ajuta să dăm mai mult sens considerațiilor teoretice de mai sus. Astfel, o chestiune este în ce măsură este realmente angajată logica de ordinul al doilea față de 'ontologia excesivă', care este angajamentul ontologic al teoriei mulțimilor, de vreme ce o propoziție de ordinul al doilea, care spune că există o mulțime cu doi membri, și anume '$(\exists X)(\exists x)(\exists y)$ $(Xx$ & Xy & $x \neq y)$', nu este validă. (Propoziția este falsă în toate interpretările ale căror domenii au un singur membru.) Indiferent de asemănările și similaritățile cu teoria mulțimilor, este destul de greu să vorbim despre presupoziții set-teoretice **mari** ale

[24] În prezenta discuție metateoretică abordez numai logica 'reală' sau standard de ordinul al doilea.

unui sistem al cărui limbaj nu reține propoziția că există o mulțime cu doi membri ca pe o propoziție validă.

Cealaltă chestiune este cu cât ne-am îmbunătăți poziția, dacă am urma sfatul lui Quine de a comuta de la idiomul logic al lui 'Fx' la idiomul set-teoretic al lui '$x \in \alpha$', din moment ce o modificare a limbajului de-a lungul liniilor sugerate de către Quine poate avea ca rezultat corelarea unor formule de ordinul al doilea valide cu formule set-teoretice corespunzătoare care sunt nevalide. Vrem să continuăm cu această procedură de traducere care are drept rezultat o pierdere de formule valide şi de alte relații logice? De pildă, după cum am notat mai sus cu privire la o formulă înrudită, formula de ordinul al doilea '$(\exists X)(\forall x)Xx$' este validă, în timp ce omoloaga sa set-teoretică explicită, care se obține în acord cu sfatul lui Quine, este formula set-teoretică nevalidă '$(\exists \alpha)(\forall x)(x \in \alpha)$'.

Cele două chestiuni de mai înainte depind de noțiunea de validitate adoptată, care la rândul său depinde, într-un mod esențial, de noțiunea de interpretare pentru un limbaj de ordinul al doilea. Aşadar, pentru a fi clar în privința semnificației celor două cazuri care implică noțiunea de validitate, trebuie să se pornească de la noțiunea de interpretare. În privința acestei noțiuni, însă, am arătat în capitolul anterior că atât în logica de ordinul întâi cât şi în logica standard ('reală') de ordinul al doilea este implicată aceeaşi noțiune de interpretare. Aşadar, atunci când comparăm cele două logici, focalizarea exclusivă asupra a ceea ce le separă este unilaterală, deoarece există noțiuni semantice şi metalogice cruciale, care caracterizează cele două logici şi care sunt fundamental, sau chiar literalmente identice în ambele.

Astfel, să ne reamintim succint că următoarele definiții de ordinul al doilea pot fi aplicate *mutatis mutandis* oricărei mulțimi de propoziții care aparțin unui limbaj de ordinul întâi. O propoziție este validă în logica de ordinul al doilea atunci când este

adevărată în toate interpretările ei. O interpretare în logica 'standard' de ordinul al doilea[25] pentru o mulțime de propoziții, dintre care cel puțin una este de ordinul al doilea, este exact același gen de lucru care este o interpretare pentru un limbaj de ordinul întâi. Și anume, o pereche ordonată $<D,V>$, unde D este o mulțime nevidă de obiecte și V este o atribuire a unei funcții pentru fiecare constantă n-adică nonlogică ce apare în propozițiile limbajului. Ca de obicei, numele sunt constante-funcție de gradul 0, iar literele-propoziții sunt constante-predicat de gradul 0. În general, așadar, domeniul funcției pe care V o atribuie fiecărei constante nonlogice este mulțimea tuturor n-tuplurilor de membri ai mulțimii D, unde n este gradul constantei, iar domeniul este o submulțime a lui D, dacă atribuirea pe care o realizează V este o funcție care este definită pentru un simbol funcțional n-adic, și o submulțime a mulțimii de valori de adevăr $\{\top,\bot\}$, dacă atribuirea pe care o face V este o funcție caracteristică definită pentru o constantă-predicat n-adică. Să ne reamintim totodată că ideea construcției este să păstreze aceleași domenii de valori pentru variabilele de ordinul întâi și pentru cele de ordinul al doilea.

Cea de-a doua chestiune examinată mai sus, și anume aceea că formula de ordinul al doilea '$(\exists X)(\forall x)Xx$' este validă, în timp ce omoloaga sa explicit set-teoretică, produsă în acord cu sfatul lui Quine, este formula set-teoretică nevalidă '$(\exists \alpha)(\forall x)(x \in \alpha)$', privește nu numai noțiunea de interpretare, care figurează în definirea noțiunii de formulă validă sau problema dacă este sau nu acceptabil să se piardă anumite validități în procesul comutării la idiomul set-teoretic. Mai important, ea dezvăluie totodată anumite presupoziții set-teoretice, care deschid un câmp larg pentru discuția despre cât de multe angajamente ontologice pot fi admise, dacă ele pot fi în genere admise, într-o logică autentică.

---

[25] Să ne reamintim că în logica 'standard' de ordinul al doilea cuantificatorii parcurg **toate** submulțimile domeniului cuantificatorilor de ordinul întâi, sau toate relațiile de pe acel domeniu.

Cazul discutabil în această privință este generat de către faptul că există anumite propoziții de ordinul al doilea, care sunt adevăruri logice (ale logicii de ordinul al doilea) şi al căror adevăr cere să existe submulțimi ale domeniilor interpretărilor lor. Cu alte cuvinte, constituindu-ne într-un ecou al plângerilor lui Quine, ceea ce poate să apară ca fiind problematic în logica de ordinul al doilea este că trebuie să se cuantifice asupra mulțimilor, ceea ce, potrivit lui Quine, indică supozițiile existențiale set-teoretice masive ale logicii de ordinul al doilea, care nu sunt potrivite pentru o logică autentică. Pentru a ne întoarce la un exemplu folosit în secțiunea anterioară a acestui capitol, să remarcăm că formula de ordinul al doilea aparent contradictorie '$(\exists X)(\forall x)(Xx \leftrightarrow x \notin x)$' este de fapt validă, dacă domeniile lui 'X' şi 'x' sunt ținute separat. Motivul este că în fiecare interpretare dată $\mathfrak{I}$, formula de ordinul al doilea '$(\exists X)(\forall x)(Xx \leftrightarrow x \notin x)$' este adevărată, deoarece putem găsi întotdeauna o interpretare potrivită $\mathfrak{I}'$, care va face formula '$(\forall x)(Fx \leftrightarrow x \notin x)$' adevărată prin atribuirea față de litera-predicat 'F' a mulțimii tuturor obiectelor **din domeniul lui** $\mathfrak{I}$ care nu au cu ele însele relația pe care $\mathfrak{I}$ o atribuie lui '$\in$'. Din moment ce domeniul lui $\mathfrak{I}$ este o mulțime, un *Aussonderungsaxiom*, care este una dintre axiomele teoriei mulțimilor, ne dă garanția că va exista întotdeauna o astfel de submulțime a domeniului. Intuitiv, ceea ce spune *această formulă* este că există o anumită mulțime, şi anume una care conține toate obiectele sau mulțimile care nu sunt self-membre (care nu se conțin pe ele însele ca membre) şi numai pe acelea. Şi în acest fel, validitatea ei de ordinul al doilea ne înfățişează angajamentul logicii de ordinul al doilea față de existența anumitor genuri de mulțimi.

Desigur, dacă sunteți un purist, şi insistați că nimic nu are calitatea unui adevăr al logicii, dacă nu satisface criteriul 'neutralității față de un topos oarecare', atunci este foarte probabil că veți ajunge să spuneți, precum Quine, că nici o

propoziție nu va exprima un adevăr logic autentic, dacă ceea ce face ca acea propoziție să fie adevărată este asertarea existenței mulțimilor. Nu este uşor să ne opunem acestei concepții, pentru că alături de ideea că validitatea este o proprietate formală a argumentelor logice, ideea că logica, spre deosebire de orice altă știință, nu poartă asupra nici unui subiect special (adică este, cu alte cuvinte, 'neutră față de orice topos') şi în particular nu este despre mulțimi, este una dintre dogmele fondatoare care pune logica în mişcare. Dar atunci cum s-ar mai putea pretinde că a face afirmații despre existența mulțimilor se deosebeşte în vreun fel de asertarea existenței altor tipuri de entități? Cum ne-ar mai permite, în general, cuantificarea asupra mulțimilor să ne păstrăm în limitele domeniului unei logici autentice?

Este dificil să dăm răspunsuri satisfăcătoare la aceste întrebări. În partea care a mai rămas din secțiunea aceasta şi în secțiunea urmatoare din acest ultim capitol, voi încerca să găsesc o soluție care este compatibilă cu considerarea logicii de ordinul al doilea ca ramură a logicii. Atunci când cineva vrea să se folosească de argumentul neutralității față de un topos împotriva logicii de ordinul al doilea, pretinzând că logica de ordinul al doilea nu se bucură de o astfel de neutralitate şi drept urmare nu este o logică, pentru că în logica de ordinul al doilea se poate cuantifica asupra mulțimilor, proprietăților şi relațiilor, acea persoană trebuie să fie gata să accepte că ceea ce face este să pună pe picior de egalitate noțiunile de mulțime, clasă, proprietate şi relație, pe de o parte, cu anumite noțiuni care prezintă un interes primar pentru științele speciale, pe de altă parte. Totuşi, există o intuiție persistentă după care noțiunile de care se ocupă logica de ordinul al doilea şi logicile de ordin superior sunt, într-un sens foarte clar, mai generale decât noțiunile cu care au de-a face celelalte științe mai speciale. La urma urmei, noțiuni precum aceea de *mulțime*, *clasă*, *proprietate*, sau *relație* sunt aplicabile la **orice**, din moment ce orice aparține unei

mulțimi, sau alteia, e. g. propriei sale mulțimi-unitate, are o proprietate, e. g. self-identitatea, sau poate avea o relație, e. g. identitatea, cu ceva, e. g. cu sine însăşi. Dar este evident că noțiunile care cad în sfera de interes a ştiințelor speciale nu se bucură de această caracteristică de a fi aplicabile la orice. Dar atunci nu este nerezonabil să socotim că noțiunile care cad în sfera de interese a logicii de ordinul al doilea nu sunt de acelaşi gen precum conceptele despre care sunt alte ştiințe. În consecință, merită să încercăm să dăm unele temeiuri pentru a considera noțiunile de *mulțime*, *clasă*, *proprietate*, sau *relație* ca noțiuni logice, sau cel puțin ca stând mult mai aproape de conceptele care sunt autentic logice, decât de conceptele care țin de ontologia unei ştiințe speciale. Această strategie de argumentare în favoarea logicii de ordinul al doilea este indicată de către Boolos atunci când spune

> Faptul că anumite aserțiuni despre existența mulțimilor sau a relațiilor sunt socotite drept adevăruri logice în sisteme de ordinul al doilea, sau de ordin mai înalt, nu mi se pare a fi suficient pentru a le descalifica în calitate de sisteme de logică, aşa cum ar fi descalificat un sistem, dacă ar clasifica drept un adevăr al logicii existența unei planete care are cel puțin doi sateliți. Partea a treia a *Begriffsschrift*, de exemplu, în care a fost dată pentru prima dată definiția ancestralului, este tot atât de mult o parte a unui tratat de logică precum sunt primele două părți; prima apariție a unui cuantificator de ordinul al doilea în *Begriffsschrift* nu descalifică această lucrare, din acel punct înainte, ca pe o operă de logică, mai mult decât o face folosirea în pasaje anterioare a semnului pentru identitate, sau a semnului pentru negație.[26]

Dar înainte de a merge mai departe şi de a elabora mai în amănunt concepția plauzibilă că noțiunile cu care lucrăm în logica de ordinul al doilea sunt noțiuni logice autentice, aş vrea să adaug o ultimă remarcă în legătură cu două întrebări pe care le-am ridicat mai înainte. Şi anume întrebarea care vizează presupozițiile set-teoretice ale logicii de ordinul al doilea şi întrebarea care se referă la pierderea de formule valide atunci când se face trecerea de la idiomul logicii de ordinul al doilea la acela al teoriei mulțimilor. Am făcut mai înainte observația că afirmația că logica de ordinul al doilea

[26] *Ibid.*, pg. 517.

are presupoziții ontologice (set-teoretice) vaste pare să fie prea tare, atâta timp cât ea nu este angajată nici măcar față de validitatea propoziției care asertează existența unei mulțimi cu doi membri. Pe de altă parte, însă, există un sens foarte clar în care validitatea anumitor propoziții de ordinul al doilea, precum aceea discutată mai sus, și anume '$(\exists X)(\forall x)(Xx \leftrightarrow x \notin x)$', ne cere să cuantificăm asupra mulțimilor sau a submulțimilor domeniului interpretării. Așadar, faptul că interpretarea validităților de ordinul al doilea cere o ontologie care este mai bogată decât aceea pe care o cere interpretarea omoloagă din logica de ordinul întâi nu este un subiect de controversă. Ceea ce este în discuție, însă, este dacă mai putem considera sau nu logica de ordinul al doilea o logică, în condițiile în care sunt dați aceeași parametri, precum cei care sunt fixati pentru genul de interpretare indicat aici.

Totuși, deși nu putem da un sens domeniului unui cuantificator și unei variabile de ordinul al doilea, dacă nu suntem dispuși să acceptăm această ontologie bogată, aceasta nu ne obligă să recunoaștem îndreptățirea punctului de vedere că propozițiile de ordinul al doilea spun același lucru ca și omoloagele lor corespunzătoare din teoria mulțimilor. De fapt, există un sens foarte riguros în care se poate spune chiar mai mult, și anume că nici o propoziție de ordinul al doilea nu poate spune **exact același lucru** precum pandanta sa din teoria mulțimilor (a se vedea mai jos elaborarea acestei idei). Dar atunci, în ce sens ne mai este permis să vorbim despre o 'omoloagă' a unei propoziții din limbajul logicii de ordinul al doilea în limbajul teoriei mulțimilor? În sensul sugestiei lui Quine de a comuta de la idiomul logicii de ordinul al doilea la acela al teoriei mulțimilor? Oricum, însă, dacă înțelesul nu poate fi păstrat prin procedura de traducere, atunci a vorbi despre o formulă omoloagă este excesiv.

Diferența crucială în această privință între limbajul logicii de ordinul al doilea și limbajul teoriei mulțimilor este aceea că ceea ce spune o propoziție a limbajului de ordinul al doilea într-o anumită interpretare va depinde de *acea* interpretare. Și nu avem niciodată **toate** mulțimile în domeniul unei interpretări de ordinul al doilea. Astfel, atunci când spunem că '$(\exists X)(\forall x)(Xx \leftrightarrow x \notin x)$' este validă în logica de ordinul al doilea, aceasta nu revine la a spune că propoziția exprimă judecata că – intr-un sens *absolut*, lipsit de orice precizări în legătură cu expresia cuantificațională – **există** o mulțime ai cărei membri sunt toate obiectele care nu sunt self-membre și numai ele. Mai degrabă, judecata pe care o exprimă propoziția este că există **o submulțime a domeniului**, astfel încât ea conține pe toți membrii **domeniului** care nu-si apartin lor înșiși și numai pe ei.

Dar dacă generalizăm această idee, atunci trebuie să fie clar că nici o propoziție de ordinul al doilea nu ar putea să spună ceea ce spune pretinsa sa omoloagă set-teoretică. Pentru că indiferent ceea ce asertează o propoziție de ordinul al doilea, în mod valid sau nu, trebuie să fie relativizat la domeniul interpretarii sale. Și deoarece în domeniul oricărei interpretări de ordinul al doilea, spre deosebire de cazul unei interpretări pentru o propoziție set-teoretică, nu putem dispune de toate mulțimile, decurge că nici o propoziție de ordinul al doilea nu poate spune ceea ce spune omoloaga sa aparentă. În particular, deși, așa cum s-a remarcat mai înainte, propoziția '$(\exists X)(\forall x)Xx$' este validă, aceasta nu spune că există o mulțime, astfel încât ***orice*** îi aparține. Cu alte cuvinte, formula respectivă nu pretinde că există mulțimea (univers a) tuturor mulțimilor, formulă care este falsă, dacă teoria axiomatică Zermelo-Fraenkel a mulțimilor este corectă. Ceea ce asertează, de fapt, propoziția validă de ordinul al doilea '$(\exists X)(\forall x)Xx$' este că există o submulțime a domeniului oricărei interpretări de ordinul al doilea pentru '$(\exists X)(\forall x)Xx$' în așa fel încât orice (fie

acela un obiect individual sau o mulțime) din *acel* domeniu aparține submulțimii. Și încă o dată, această redare corectă a ceea ce spune propoziția '$(\exists X)(\forall x)Xx$' nu poate echivala cu cerința să existe mulțimea (univers a) tuturor mulțimilor, deoarece nici o interpretare a propoziției '$(\exists X)(\forall x)Xx$', și mai în general a oricărei propoziții de ordinul al doilea, nu are ca domeniu al ei o mulțime care să conțină **toate** mulțimile.

Aș putea adăuga, totuși, doar un nivel suplimentar de generalizare deasupra poziției pe care am adoptat-o mai înainte cu privire la presupozițiile set-teoretice ale logicii de ordinul al doilea. Dacă ideea de bază este că operația de cuantificare în logica de ordinul al doilea trebuie relativizată la mulțimea tuturor submulțimilor **domeniului interpretării** și, spre deosebire de cazul teoriei mulțimilor, în logica de ordinul al doilea nu asumăm niciodată că lucrăm cu mulțimea **tuturor** mulțimilor, atunci suntem obligați să acceptăm că logica de ordinul al doilea este totuși angajată față de existența unei mulțimi, independent de orice relativizare la interpretările și la domeniile lor. Mulțimea vidă este o submulțime a oricărei mulțimi și, a fortiori, a oricărei mulțimi care alcătuiește domeniul unei interpretări de ordinul al doilea.

Deci, chiar dacă domeniul unui cuantificator de ordinul al doilea și al unei variabile de ordinul al doilea se schimbă cu fiecare interpretare al cărei domeniu este diferit de domeniul unei alte interpretări[27] există, cu toate acestea, o mulțime față de a cărei existență este angajată logica de ordinul al doilea și, mai mult, a cărei existență nu este relativă la domeniul nici unei interpretări particulare. Această mulțime este mulțimea vidă.

Prin urmare, este corect să încheiem această secțiune, în care ne-am ocupat în primul rând de argumentele lui Boolos în favoarea logicii de ordinul al doilea,

[27] În această privință, semantica unui cuantificator și a unei variabile de ordinul al doilea, al căror domeniu poate să varieze o dată cu schimbarea domeniului unei interpretări, este similară semanticii unui indexical, a cărui extensiune (referință) poate să varieze de la un context de folosire la altul.

prezentând punctul său de vedere asupra măsurii în care se pot accepta în mod rezonabil angajamentele ontologice ale logicii de ordinul al doilea față de teoria mulțimilor. Boolos spune

> ... din moment ce mulțimea vidă este o submulțime a domeniului oricărei interpretări şi este unica mulțime căreia nu-i aparține nici un membru al nici unui domeniu, se poate socoti că '$(\exists X)(\forall x)\sim Xx$' asertează existența mulțimii vide independent față de orice interpretare, iar logica de ordinul al doilea poate fi astfel văzută ca fiind angajată şi față de existența sa. [...] În cazul logicii de ordinul al doilea, însă, angajamentul este excesiv de modest: mulțimea vidă este singura mulțime față de a cărei existență se poate spune că este angajată logica de ordinul al doilea.[28]

Ca să conchidem, dacă vom decide sau nu să considerăm că logica de ordinul al doilea este o logică, se poate spune că depinde, în cele din urmă, de decizia de a accepta sau nu în corpul presupozițiilor (ontologice ale) unei logici asumpția constitutivă că există, în mod fundamental, doar o singură mulțime, într-un mod independent față de orice interpretare, iar acea mulțime este mulțimea vidă. (Aceasta este una dintre supozițiile fundamentale care se face în teoria mulțimilor **pure**.)

Un alt argument (prospectiv) pentru logica de ordinul al doilea

În ultima secțiune a acestui capitol, vreau să schițez o altă abordare prospectivă care vizează considerarea logicii de ordinul al doilea ca o logică autentică. Ținta argumentului, a cărui elaborare atentă o voi lăsa deschisă pentru o cercetare viitoare, este trasarea unei distincții mai fine între logica de ordinul al doilea şi teoria mulțimilor. Distincția va fi motivată de către o distincție corespunzătoare între două noțiuni de mulțimi, care se subsumează domeniului logicii de ordinul al doilea şi respectiv domeniului teoriei mulțimilor. Aceasta este distincția, pe care o voi explica în continuare, dintre ceea ce voi numi o mulțime 'fregeană' şi o mulțime 'iterativă'.

---

[28] *Ibid.*, pg. 520.

De fapt, între concepția fregeană despre mulțimi și concepția naivă despre mulțimi există o asemănare puternică. De aceea, voi introduce concepția fregeană despre mulțimi prin intermediul unui ocol prin concepția naivă.

Trei idei intuitive conducătoare sunt constitutive pentru concepția naivă despre mulțimi.

(i) Mulțimile sunt determinate de către elementele lor, în sensul (mai precis) că două mulțimi nu pot fi identice dacă nu au în comun toate elementele lor (legea extensionalității pentru mulțimi). Astfel, dacă prin $\mathcal{L}'$ denotăm un limbaj formalizat de ordinul întâi, în așa fel încât constantele sale nonlogice sunt litera-predicat monadică 'S' (abreviere pentru '... este o mulțime') și litera-predicat diadică '$\in$' (care stă pentru relația set-teoretică de apartenență), atunci legea extensionalității va fi exprimată prin propoziția de ordinul întâi

$$(\forall x)(\forall y)(Sx \,\&\, Sy \,\&\, ((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)).$$

(ii) Elementele unei mulțimi sunt anterioare (în sens logic și nu temporal) mulțimii, iar mulțimea are elementele, pe care le are de fapt, într-un mod esențial, adică în toate 'lumile posibile' în care există mulțimea.

(iii) Fiecărei condiții, care este satisfăcută de către unele obiecte, îi corespunde mulțimea obiectelor care satisfac condiția. Astfel, dacă luăm pe Φ ca pe condiția noastră arbitrară, atunci propoziția universală (de ordinul al doilea)

$$(\forall \Phi)(\exists y)(Sy \,\&\, (\forall x)(x \in y \leftrightarrow \Phi x))$$

în care toate aparițiile lui y în Φ, dacă există vreuna, sunt legate, exprimă această idee.

Totuși, așa după cum se știe foarte bine, în pofida plauzibilității sale intuitive, ideea consemnată la (iii) se dovedește a conduce la paradox. Pentru că este suficient să stipulăm că Φ este condiția de 'a fi o mulțime non-self-membră' pentru a obține paradoxul lui Russell, care arată că teoria naivă a mulțimilor este inconsistentă.

Principala motivație, atunci, de a introduce concepția fregeană despre mulțimi, care este cerută de către semantica logicii de ordinul al doilea, este de a păstra angajamentele ontologice ale logicii de ordinul al doilea între niște limite rezonabile și de a proteja logica de apariția paradoxurilor (inconsistențelor). Astfel, în pofida paralelismului puternic dintre concepția naivă și concepția fregeană, există temeiuri bune pentru a prefera noțiunea din urmă, pe care o voi delimita imediat, noțiunii dintâi. Pentru că teoria naivă a mulțimilor ne angajează față de conceptul existenței mulțimii **tuturor** mulțimilor și a mulțimii (russelliene) a **tuturor** mulțimilor care nu sunt self-membre. Și doar pentru că știm că aceste angajamente conduc la paradox nu putem, totuși, infera că doctrina fregeană despre multimi, în această reconstrucție pe care o schițăm aici, dă naștere la probleme similare. Dar atunci comitem sofismul cercului vicios, dacă spunem că logica de ordinul al doilea presupune o noțiune de mulțime care este, în privințe importante, similară aceleia caracteristică concepției naive, și că acest fapt ar constitui o indicație că ea este angajată față de oricare presupoziții, sau cel puțin față de o parte dintre presupozițiile, față de care este angajată teoria naivă a mulțimilor. Deoarece chiar dacă structura set-teoretică subiacentă unei interpretări de ordinul al doilea are trăsături comune cu concepția naivă despre mulțimi, există totodată și trăsături distinctive importante, care sunt determinante pentru existența unor sisteme corecte, și așadar consistente, de logică de ordinul al doilea, în timp ce teoria naivă a mulțimilor este *pur și simplu* inconsistentă.

Am spus în secțiunea precedentă a acestui capitol că propoziția de ordinul al doilea '$(\exists X)(\forall x)(Xx \leftrightarrow x \notin x)$', care spune că există o mulțime ai cărei membri sunt toate obiectele care sunt non-self-membre și numai acelea, este validă în logica de ordinul al doilea. Motivul este acela că în fiecare interpretare $\mathcal{I}$, judecata pe care o exprimă propoziția, anume că există o **submulțime a domeniului**, în așa fel încât **ea**

TIMIȘOARA

conține toate obiectele din domeniu şi numai pe acelea care nu au cu ele însele relația pe care $\mathcal{I}$ o asignează lui '$\in$', este o judecată adevărată.

Problema care apare acum este următoarea: nu este logica de ordinul al doilea amenințată de inconsistență pentru că admite ca fiind validă o propoziție care, atunci când este interpretată în teoria mulțimilor, conduce la paradoxul lui Russell? Dar pe de altă parte, dacă, aşa cum s-a indicat înainte, această amenințare nu este reală, în condițiile în care păstrăm distincte mulțimile de obiecte în care li se asignează valori lui X şi respectiv lui x, atunci cum am putea ajusta ideea intuitivă din (iii) pentru a o putea face funcțională în logica de ordinul al doilea?

Simplu spus, propunerea mea este aceea că logica de ordinul al doilea 'tratează' despre mulțimi în sensul delimitat intuitiv de către (i) - (iii), cu o modificare corespunzătoare a lui (iii), în aşa fel încât paradoxul lui Russell să fie evitat. Astfel, atunci când se spune că teoria mulțimilor are de-a face cu mulțimi în acest sens, ceea ce se obține de fapt este logica de ordinul al doilea în 'blană de lup'. În timp ce teoria autentică a mulțimilor, cu întreaga sa ontologie a mulțimilor, poartă asupra unor concepte mai elaborate şi non-naive de mulțimi, precum este şi acela propus de către concepția iterativă a mulțimilor.

Preferința mea de a asocia mulțimi fregeene domeniilor interpretărilor pentru un limbaj de ordinul al doilea nu este una doar terminologică. Întrucât rațiunea sa de bază nu este numai aceea de a evita orice conotație de inconsistență pe care o declanşează utilizarea expresiei 'teoria naivă a mulțimilor'. Există cel puțin trei temeiuri puternice pentru a folosi această terminologie atunci când vorbim despre semantica standard pentru limbaje de ordinul al doilea.

(1) Pentru cuantorii de ordinul al doilea există colecții de reguli corecte, şi aşadar consistente, față de interpretarea standard. Ar fi înşelător, atunci, să explicăm

noțiunea de domeniu de discurs pentru o interpretare de ordinul al doilea în termenii unei noțiuni brute – lipsite de calificări – de mulțime. Întrucât, dacă lăsăm deschisă posibilitatea interpretării domeniilor în termenii mulțimilor naive, atunci, într-un mod impropriu, dăm un semnal că există și posibilitatea ca logica de ordinul al doilea să fie inconsistență în ultimă instanță.

(2) Preferința pentru eticheta 'fregean', atunci când vorbim despre mulțimi în contextul logicii de ordinul al doilea, este motivată de către dogma fregeană fundamentală că o mulțime este extensiunea unui concept.

(3) În dogma fregeană menționată la punctul (2), este adânc înrădăcinat ceva care, într-un sens foarte clar, este de natură logică. Ceea ce am în vedere prin toate acestea este că putem obține imaginea pe care o reprezintă punctul (2) cu ajutorul doar al unor concepte logice. Astfel, este o chestiune de logică să se spună că oricare literă-predicat monadică – al cărei sens este un concept – în fiecare limbaj, fie se aplică oricărui obiect dat din domeniul unei interpretări, fie nu se aplică (legea terțului exclus). Dar atunci, următorul pas în raționament vine în mod foarte natural. Întrucât ne apare clar că oricărui predicat monadic îi putem asocia două genuri de lucruri (complementare) în domeniu: genul de lucruri despre care predicatul este adevărat și genul de lucruri despre care predicatul este fals. Aceasta înseamnă, mai departe, că fiecărui predicat îi putem asocia mulțimea tuturor lucrurilor și numai a acelor lucruri la care el se aplică în mod adevărat. Și din moment ce potrivit axiomei extensionalității pentru mulțimi nu pot să existe două astfel de mulțimi distincte, ajungem astfel într-un mod firesc la ideea, care într-un sens clar ne amintește de ideea fregeană menționată la punctul (2), că fiecărei litere-predicat îi putem asocia o *extensiune* definită într-o interpretare dată. Unii autori, inclusiv Boolos, au botezat concepția aceasta despre mulțimi – pentru care argumentez aici și care este

condensată în dictumul: 'Fiecare predicat are o extensiune' – *concepția naivă despre mulțimi.*[29] Mă voi abține să folosesc această etichetă, cu atât mai mult când contextul discuției este logica de ordinul al doilea.

Iată acum o prezentare condensată a gândului intuitiv care stă la baza concepției iterative despre mulțimi.[30] Mulțimile sunt colecții de obiecte şi fiecare mulțime este generată la un anumit stadiu al unui proces care se desfăşoară în stadii consecutive. Punctul de pornire al procesului prezintă două forme diferite, în funcție de faptul că se presupune sau nu existența obiectelor individuale. Într-una dintre versiuni, concepția asumă existența indivizilor, adică a obiectelor care nu sunt mulțimi şi prin urmare nu conțin membri. Potrivit celeilalte versiuni, procesul începe de la stadiul cel mai auster, la care nu există nici un individ. Mulțimile care sunt generate pornind de la asumpția că nu există nici un individ se numesc mulțimi *pure*.

Indiferent dacă prima fază a procesului asumă sau nu existența indivizilor, fiecare stadiu succesiv din proces va fi generat potrivit aceluiaşi tip de instrucțiune. Astfel, la stadiul zero (începem numărătoarea stadiilor de la zero, iar punctul de pornire de la indivizi existenți/non-existenți este anterior acestui stadiu zero) sunt formate toate colecțiile posibile de indivizi. Sau altfel, dacă nu există nici un individ, atunci singura colecție care este formată la stadiul zero va consta din mulțimea vidă. În general, numărul de colecții care urmează a fi generate la stadiul zero va depinde de numărul, n, de indivizi care există. Şi este evident că numărul de colecții la stadiul zero este egal cu 2^n.

La stadiul unu mulțimile sunt generate potrivit instrucțiunii: să se formeze toate colecțiile posibile de indivizi şi de mulțimi formate la stadiul zero. Şi în general,

---

[29] Cf. G. Boolos The Iterative Conception of Set, *Journal of Philosophy*, volumul LXVIII, nr. 8, 1971, pg. 215 - 231.

[30] În această descriere sumară a concepției iterative despre mulțimi urmăresc în general, cu unele modificări, prezentarea lui Boolos în *op. cit.*, pg. 220- 224.

la fiecare stadiu n, n finit şi ≥ 1, instrucţiunea de generare a mulţimilor stadiului al n-lea va fi: să se formeze toate colecţiile posibile de indivizi şi de mulţimi formate la fiecare stadiu precedent de la stadiul 0 şi până la stadiul $n - 1$ inclusiv. Bineînţeles, procesul nu se opreşte aici, deoarece continuă la nivelul transfinitului. Astfel, imediat după toate stadiile finite zero, unu, doi, trei, ... există un stadiu următor numit omega. La stadiul omega se formează toate colecţiile posibile de indivizi şi de mulţimi care sunt formate la fiecare stadiu precedent şi una dintre ele este mulţimea **tuturor** mulţimilor formate la stadiile zero, unu, doi, ... Procesul continuă la stadiul omega plus unu, unde se formează toate colecţiile posibile de indivizi şi mulţimi care sunt formate la stadiul zero, unu, doi, ..., şi omega. Pentru a menţine procesul în continuă mişcare la nivelul transfinit, se poate face apel acum la o versiune ajustată a generalizării care a fost utilizată la nivel finit. Astfel, în general, la fiecare stadiu $\omega + n$, n finit şi ≥ 1, instrucţiunea de generare a mulţimilor stadiului $\omega + n$ va fi: să se formeze toate colecţiile posibile de indivizi şi mulţimi formate la fiecare stadiu precedent de la stadiul 0 până la stadiul $\omega + (n - 1)$ inclusiv.

După stadiile 0, 1, 2, ..., ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... stadiul imediat următor este $\omega + \omega$ (sau $\omega \times 2$). La stadiul $\omega + \omega$ se formează toate colecţiile posibile de indivizi şi de mulţimi care sunt formate la fiecare stadiu precedent. La stadiul $\omega + \omega + 1$ se formează toate colecţiile posibile de indivizi şi de mulţimi formate la stadiul zero, unu, ..., omega, omega plus unu, ..., omega plus omega. Şi din nou, în general, la fiecare stadiu $\omega + \omega + n$, n finit şi ≥ 1, instrucţiunea pentru generarea mulţimilor stadiului $\omega + \omega + n$ va fi: să se formeze toate colecţiile posibile de indivizi şi de mulţimi formate la fiecare stadiu precedent de la stadiul 0 până la stadiul $\omega + \omega + (n - 1)$ inclusiv. Procesul continuă în felul acesta fără încetare

... $\omega \times 3$ ...

... $\omega \times 4$ ...

... $\omega \times \omega$ ...

Descrierea generării mulțimilor potrivit instrucțiunilor care stau la baza concepției iterative lasă nedecisă chestiunea dacă trebuie să spunem sau nu că mulțimile sunt formate din nou și din nou, sau doar să spunem că fiecare mulțime este formată la un anumit stadiu unic. De fapt, o citire atentă a instrucțiunii care produce mulțimile la fiecare stadiu pare să indice mai degrabă că o mulțime este formată (din nou și din nou) la fiecare stadiu succesiv în raport cu stadiul la care mulțimea este formată pentru prima oară. Totuși, chiar dacă nu este nimic greșit în mod intrinsec cu acest mod de a descrie procesul, Boolos alege varianta unicității stadiului de formare pentru fiecare mulțime:

> ... în schimb, vom spune că o mulțime este formată numai o dată, anume la cel mai timpuriu stadiu la care, după modul nostru vechi de a vorbi, s-ar fi spus că se formează.[31]

Avantajele concepției iterative despre mulțimi sunt evidente.[32] Ideea centrală pe care se bazează instrucțiunea pentru generarea mulțimilor la fiecare nivel este naturală. Procesul nu este conceput cu scopul de a scăpa de paradoxurile set-teoretice. Cu toate acestea, toate conceptele sau condițiile care sunt răspunzătoare pentru producerea paradoxurilor nu ajung să determine nici o mulțime, dacă prin 'mulțime' înțelegem acum ceea ce se înțelege în concepția iterativă. Astfel, potrivit acestei concepții, nici o mulțime nu poate să-și aparțină sie însăși, și în consecință, nu există

---

[31] *Ibid.*, pg. 222.

[32] Nu este scopul meu aici să urmăresc chestiunea modalității în care poate fi purificată această prezentare brută a concepției iterative de fiecare element antropomorfic, care este prezent în procesul generării mulțimilor prin stadii consecutive. Este important să spunem, însă, că sarcina poate fi îndeplinită cu succes. Antropomorfismul nu este o amenințare reală pentru această concepție despre mulțimi.

un astfel de lucru precum 'mulțimea tuturor mulțimilor'. Motivul este acela că fiecare mulțime poate fi formată, dacă poate fi formată în genere, la un stadiu care este ulterior stadiului celui mai avansat la care sunt formați membrii acelei mulțimi. De asemenea, nu pot exista două mulțimi oarecare care să-şi aparțină una alteia. Pentru că dacă ar fi aşa, atunci o mulțime ar putea fi formată la un stadiu anterior față de stadiul cel mai timpuriu la care este formată mulțimea. Iar aşa ceva este imposibil.

Acum, după ce ne-am făcut o idee generală cu privire la ce anume este implicat în distincția dintre concepția fregeană şi concepția iterativă despre mulțimi, teza tentativă pentru care vreau să argumentez este că logica de ordinul al doilea este esențialmente despre mulțimi concepute drept submulțimi ale domeniului unei interpretări de ordinul al doilea, sau dacă vorbim în idiomul adoptat aici, despre mulțimi fregeene. Ea nu este, însă, despre întregul domeniu al mulțimilor care fac obiectul teoriei mulțimilor. În consecință, presupozițiile set-teoretice față de care este angajată ontologic logica de ordinul al doilea sunt păstrate la un nivel minim, şi mai mult, întreaga ontologie a mulțimilor pe care o presupune teoria mulțimilor nu stă în fundalul logicii de ordinul al doilea. Teoria mulțimilor, pe de altă parte, este despre un domeniu mai cuprinzător de mulțimi. Iar dacă vrem să scăpăm de inconsistența cu care este împovărată teoria naivă a mulțimilor, trebuie să luăm în calcul unele opțiuni pentru a îngusta domeniul mulțimilor acceptabile. Astfel de opțiuni sunt teoriile axiomatice ale mulțimilor care trasează o distincție între mulțimi şi clase, sau acele versiuni ale teoriei mulțimilor care lucrează dintru început cu un concept non-naiv de mulțime, cum ar fi conceptul iterativ care blochează oricare rezultate paradoxale.

Desigur, putem întreba în mod legitim dacă distincția dintre concepția naivă şi concepția fregeană despre mulțimi este fundamentată şi poate să primească o justificare independentă. Deoarece se pare că există două lucruri care pledează pentru

considerarea distincției ca fiind *ad-hoc*. Mai întâi, există strânsa asemănare între cele două concepții în privința conceperii mulțimilor şi mai ales paralelismul dintre ideea fregeană că o mulțime este extensiunea unui concept şi axioma aparținând concepției naive care spune că fiecărei condiții care este satisfăcută de către unele obiecte îi corespunde mulțimea acelor obiecte care satisfac condiția. Dar în al doilea rând, pare a fi ceva discreționar, arbitrar şi pur *ad-hoc* să se spună că niciodată nu vor apărea paradoxuri, dacă ne limităm la concepția fregeană de mulțime, care stă la baza noțiunii de interpretare de ordinul al doilea, *pentru că* nu ajungem să avem niciodată mulțimea tuturor mulțimilor în domeniul nici unei interpretări de ordinul al doilea şi menținem izolate domeniile în care li se asignează valori variabilelor 'X' şi 'x' în oricare interpretare pentru '$(\exists X)(\forall x)(Xx \leftrightarrow x \notin x)$'.

Oricum, deoarece ceea ce prezintă interes pentru noi aici sunt colecții de reguli pentru cuantori de ordinul al doilea, care sunt corecte față de semantica standard, avem toate motivele să nu acceptăm în domeniul nici unei interpretări de ordinul al doilea mulțimea tuturor mulțimilor, sau mulțimea tuturor mulțimilor care nu sunt self-membre. Întrucât paradoxul lui Cantor şi respectiv acela al lui Russell ne spun că aceste mulțimi de fapt nu există, sau dacă doriți, acele condiții nu determină formarea unor mulțimi. Aşadar, nu este nimic *ad-hoc* în a spune că în logica de ordinul al doilea nu operăm cu mulțimi interpretate în mod naiv. Tot ceea ce dorim este să împiedicăm colecțiile noastre de reguli de ordinul al doilea să dea naştere la sisteme inconsistente. Şi aceeaşi rațiune guvernează şi prohibirea atribuirii de obiecte din aceleaşi mulțimi variabilelor 'X' şi respectiv 'x'. Atunci, dacă suntem de acord că aceste manevre în logica de ordinul al doilea nu sunt discreționare, este firesc să ne disociem de problemele față de care ne angajează utilizarea concepției naive despre mulțimi. Lucrul rațional pe care trebuie să-l facem este să ajustăm concepția naivă pentru

scopurile logicii de ordinul al doilea, în aşa fel încât să nu se producă paradoxuri în această zonă. Concepţia fregeană despre mulţimi, amendată pentru a nu produce inconsistenţe, mi se pare potrivită pentru scopurile noastre de aici.

Astfel, dacă mişcările indicate par a fi în ordine, atunci când miza este logica de ordinul al doilea, povestea este diferită atunci când ne mutăm la teoria mulţimilor în mod propriu. În acel caz, concepţia naivă ne angajează faţă de ideea că există mulţimea tuturor mulţimilor şi mulţimea tuturor mulţimilor care nu sunt self-membre. Şi acesta este un motiv foarte puternic pentru a urmări să dezvoltăm alte versiuni ale teoriei mulţimilor, care să restricţioneze într-un mod potrivit domeniul mulţimilor existente. Din păcate, acelaşi sentiment că se propune ceva *ad-hoc* reapare şi în acest caz. Şi exceptând *teoria mulţimilor* standard, de ordinul întâi, *Zermelo-Fraenkel* (prescurtată 'ZF'), care încorporează concepţia iterativă despre mulţimi, oricare dintre celelalte soluţii care au fost propuse este neacceptabilă, tocmai pentru că se pare că le lipseşte orice motivaţie de a aborda problematica teoriei mulţimilor care să fie independentă faţă de încercarea de a da seamă de paradoxurile set-teoretice. Cred că diagnosticul pe care-l pune Boolos eşecului oricăror astfel de manevre *ad-hoc* este pe de-a-ntregul corect:

> O rezolvare finală şi satisfăcătoare a paradoxurilor set-teoretice nu poate fi încorporată într-o teorie care blochează derivarea lor prin restricţii tehnice artificiale asupra mulţimii de axiome, restricţii care sunt impuse *numai pentru că* altfel s-ar produce paradoxuri; aceste alte teorii supravieţuiesc numai prin astfel de instrumente artificiale. Doar teoria ZF (împreună cu extinderile şi subsistemele ei) nu este doar consistentă (în mod evident), ci şi o teorie a mulţimilor independent motivată: Există, ca să zicem aşa, un 'gând în spatele ei' despre natura mulţimilor, care ar fi putut fi propus chiar dacă, în mod imposibil, teoria naivă a mulţimilor ar fi fost consistentă. Mai mult, gândul poate fi descris într-un mod brut, dar informativ, fără a formula mai întâi teoria în spatele căreia stă acel gând.[33]

[33] *Ibid.*, pg. 219.

Gândul la care face trimitere Boolos în pasajul de mai sus este acela implicat în mod esențial în concepția iterativă despre mulțimi. Și așa cum am argumentat mai înainte, caracterul convingător al acestui concept este rezultatul a două fapte importante, anume acela că el apare firesc în mintea noastră și respectiv acela că niciodată nu poate să genereze mulțimile problematice, chiar dacă conceptul nu este motivat și declanșat de către nevoia de a evita, sau de a scăpa de paradoxuri.

Cu toate acestea, dacă ceea ce vrem să înțelegem prin 'mulțime' în contextul teoriei mulțimilor este ceea ce spune concepția iterativă că este o mulțime, atunci mie mi se pare evident că între logica de ordinul al doilea și teoria mulțimilor nu poate fi pus în nici un fel semnul **egalității**.

Logica de ordinul al doilea, spre deosebire de teoria naivă a mulțimilor, nu sucombă în fața paradoxurilor. Acestea se datoresc, de pildă, faptului că în teoria naivă a mulțimilor, spre deosebire de logica de ordinul al doilea, nu poate fi evitată existența mulțimii tuturor mulțimilor, sau a mulțimii tuturor mulțimilor care nu sunt self-membre. Cu toate acestea, în nici o interpretare de ordinul al doilea nu este cazul că domeniul interpretării conține mulțimea **tuturor** mulțimilor. De asemenea, am discutat destul de amănunțit mai înainte că propoziția de ordinul al doilea '$(\exists X)(\forall x)(Xx \leftrightarrow x \notin x)$', care spune că există o mulțime ai cărei membri sunt toate obiectele non-self-membre și numai acelea, este validă în logica de ordinul al doilea. Dar aceasta nu revine la a face validă o propoziție care exprimă paradoxul lui Russell, deoarece înțelesul real al propoziției în cauză aici este acela că există o **submulțime a domeniului**, în așa fel încât ea conține toți membrii **domeniului** care nu-și aparțin lor înșiși, și numai pe acei membri. Iar acest lucru este perfect acceptabil, atâta timp cât niciodată nu obținem mulțimea tuturor mulțimilor în domeniul nici unei interpretări

de ordinul al doilea şi menţinem totodată separate domeniile lui 'X' şi 'x' în oricare interpretare pentru '$(\exists X)(\forall x)(Xx \leftrightarrow x \notin x)$'.

Mai mult, şi mai important, sensul în care are de-a face logica de ordinul al doilea cu mulţimi se deosebeşte în mod esenţial de concepţia iterativă despre mulţimi, concepţie care este încorporată în oricare sistem axiomatic autentic pentru teoria mulţimilor. Există un sens puternic în care domeniul unei interpretări de ordinul al doilea conţine o mulţime de obiecte pe care interpretarea le asignează extensiunilor literelor-predicat din limbaj şi pe care le pot parcurge cuantorii de ordinul al doilea, variabilele-predicat şi variabilele-indivizi. Dar după cum am indicat înainte, putem ajunge la această mulţime de obiecte printr-un gen de construcţie logică aplicând legea terţului exclus – fiecare predicat este asociat cu mulţimea de obiecte luată din domeniu, la care el se aplică în mod adevărat, şi cu complementara extensiunii sale în raport cu domeniul, la care predicatul nu se aplică în mod adevărat. Domeniul unei interpretări este mulţimea semnificaţiilor literelor-predicat şi variabilelor-predicat sub asignări, şi se poate schimba de la o interpretare la alta, comportându-se astfel precum extensiunea unui indexical, a cărui referinţă poate să varieze cu fiecare context al utilizării.

Reţeta generării mulţimilor conţinută în concepţia iterativă despre mulţimi nu este în nici un fel esenţial implicată în generarea mulţimilor de obiecte care este domeniul unei interpretări pentru un limbaj de ordinul al doilea. Faptul că cele două 'genuri' de mulţimi care prezintă interes pentru problema noastră nu revin la unul şi acelaşi lucru este indicat apoi de către faptul că mulţimea de obiecte care alcătuieşte domeniul unei interpretări în logica de ordinul al doilea are o structură booleană, în timp ce nici o mulţime care este generată în acord cu concepţia iterativă despre mulţimi nu poate să aibă o astfel de structură. În mod special, nu are nici un sens să se

vorbească despre complementara, în raport cu universul de discurs, a unei mulțimi generate potrivit concepției iterative. Dar are sens să se spună că dat fiind un domeniu fixat (univers de discurs, adică mulțime de obiecte), se poate atașa fiecărei litere-predicat din limbaj o mulțime de obiecte care constituie extensiunea sa şi complementara corespunzătoare extensiunii sale față de acel domeniu. Din acest punct de vedere, mi se pare că ceea ce numim logică de ordinul al doilea se situează mult mai aproape de logica claselor decât de oricare teorie a mulțimilor care încorporează concepția iterativă despre mulțimi. În acest sens, logica de ordinul al doilea se plasează în ultimă instanță pe un continuum cu logica de ordinul întâi, mai degrabă decât cu o teorie a mulțimilor de genul sistemului ZF, care încorporează concepția cea mai solidă despre mulțimi pe care o avem astăzi la dispoziție, anume concepția iterativă.

Logica modală propozițională este adesea concepută ca o generalizare a logicii clasice propoziționale, dar se poate construi un bun argument că cea dintâi trebuie văzută ca o formă restrânsă a logicii clasice de ordinul al doilea! Lucrarea de față consideră un aspect interesant al acestei legături de ordinul al doilea, care se leagă de un fenomen curios de incompletitudine.

Mulți oameni sunt familiarizați cu logici modale propoziționale "standard" precum *K*, sau *T*, sau *S5*. Acestea pot fi descrise axiomatic, sau semantic. Din punct de vedere semantic, ele sunt logicile caracterizate, respectiv, de către clasa: tuturor cadrelor; cadrelor reflexive; cadrelor a căror relație de accesibilitate este o relație de echivalență. Adică, de pildă, validitățile lui *T* sunt formulele adevărate în fiecare lume a fiecărui model bazat pe un cadru reflexiv. Problema este că aceste logici modale "standard" sunt "foarte bine crescute" şi prea multă familiarizare cu un astfel de comportament bun poate fi înşelătoare. Există logici modale propoziționale *incomplete*. O modalitate de a exprima această incompletitudine constă în a spune: există o clasă de cadre *C* care caracterizează o logică *L* care nu este axiomatizabilă.

Pentru a formula această idee mai exact, evitând, totuşi, detaliile unei proceduri demonstrative formale, să introducem câțiva termeni. O formulă *X* este validă într-un model-Kripke, dacă este adevărată la toate lumile modelului; este validă într-un cadru, dacă este validă în toate modelele bazate pe acel cadru. Fiind dată o mulțime *S* de formule modale închisă față de substituție, să spunem că o formulă *X* este o *consecință model* a lui *S*, dacă *X* este validă în toate modelele în care sunt valizi membrii lui *S*. Şi să spunem că *X* este o *consecință cadru* a lui *S*, dacă *X* este validă în toate cadrele în care sunt valizi membrii lui *S*. Să considerăm, de pildă, colecția

tuturor formulelor de forma $\Box X \supset X$, să o numim T. Consecințele model ale lui T şi consecințele cadru ale lui T sunt aceleaşi formule – este mulțimea axiomatizată prin adăugarea lui T la o axiomatizare standard a lui K.

Este întotdeauna cazul că consecințele model ale unei mulțimi constituie o submulțime a consecințelor cadru. Într-adevăr, pentru toate logicile modale propoziționale "standard", distincția consecință model-consecință cadru este lipsită de importanță, deoarece mulțimile coincid. Dar, există mulțimi S, închise față de substituție, care au proprietatea că setul consecințelor model este o submulțime *strictă* a colecției consecințelor cadru. Acesta se numeşte, de obicei, rezultatul de *incompletitudine*, deoarece consecința model este ceea ce captează în general sistemele axiomatice, în timp ce consecința cadru este ceea ce vrem noi în general. Aceste rezultate de incompletitudine le datorăm lui S. K. Thomason şi K. Fine.

Un instrument folosit pentru a demonstra rezultatul menționat mai sus sunt *cadrele generale*. Cadrele obişnuite constau dintr-o mulțime de lumi posibile şi o relație de accesibilitate. Cadrele generale specifică totodată o colecție de mulțimi speciale de lumi – aceste mulțimi sunt denumite adesea *judecăți* – care satisfac anumite condiții de închidere. Apoi ni se permite să considerăm numai modele bazate pe cadre generale, în care mulțimea lumilor la care sunt adevărate formulele sunt întotdeauna judecăți. Fiecare cadru este un cadru general, dar există cadre generale care nu sunt cadre. Tot aşa cum aceste cadre generale sunt un instrument util pentru demonstrarea incompletitudinii, după cum tocmai am observat, ele oferă, de asemenea, şi un gen de soluție problemei. Putem introduce o noțiune de *consecință cadru general* într-un mod evident. Deoarece există mai multe cadre generale decât cadre, mulțimea consecințelor cadru general a lui S poate fi mai mică decât mulțimea

consecințelor cadru. Şi de fapt, există o corespondență exactă între noțiunea de consecință cadru general şi noțiunea de consecință model.

Un fenomen similar apare în logica clasică de ordinul al doilea, unde se cuantifică pe submulțimi ale domeniului ca şi pe indivizi. Validitatea clasică de ordinul al doilea nu este axiomatizabilă – şi ea prezintă aspecte ale incompletitudinii. Cu mulți ani în urmă, Henkin a oferit o soluție, pe care a numit-o *modele generale*. În acestea, cuantorii asupra mulțimilor sunt restricționați la o colecție designată de submulțimi ale domeniului şi nu parcurg toate submulțimile. Validitatea relativă la modelele generale este axiomatizabilă. Modelele generale ale lui Henkin au constituit, de fapt, sursa de inspirație pentru introducerea cadrelor generale în semantica modală.

Cartea de față începe cu o prezentare generală a fundalului problemelor, urmată de examinarea detaliată a unui exemplu de fenomen de incompletitudine modală. Apoi, într-un capitol central, se arată că există o strânsă legătură între incompletitudinea modală şi incompletitudinea logicii clasice de ordinul al doilea. În mare, conexiunea se prezintă în felul următor. O demonstrație de completitudine pentru o axiomatizare a unei logici modale poate fi formalizată în logica clasică de ordinul al doilea. La un anumit punct în demonstrația formalizată, avem nevoie de existența unei anumite mulțimi de lumi posibile. Desigur, acea mulțime se află în domeniul cuantorilor de ordinul al doilea în modelele "adevărate" de ordinul al doilea, dar s-ar putea să nu fie în domeniul admisibil de cuantificare al unor modele generale de ordinul al doilea. Aşadar, argumentul poate fi condus în logica "adevărată" de ordinul al doilea, care nu este axiomatizabilă, şi nu poate fi întotdeauna condus în logica axiomatizabilă corespunzătoare modelelor generale de ordinul al doilea. De fapt, incompletitudinea modală este văzută ca un aspect al incompletitudinii clasice de ordinul al doilea.

Pentru a urmări prezentarea problemelor şi a demonstraţiilor care alcătuiesc principalul conţinut al acestei cărţi este nevoie de cunoaşterea doar a câtorva elemente tehnice de fundal. Este suficientă o familiarizare generală cu logica clasică de ordinul întâi. Aparatul tehnic modal propoziţional, semantica de ordinul al doilea, completitudinea şi incompletitudinea, toate sunt prezentate şi discutate cu o deosebită atenţie şi claritate, sub toate aspectele. Aceasta este o carte pe care o pot citi şi nespecialiştii. Investigaţii de genul acesta sunt importante, nu pentru că demonstrează noi teoreme, ci pentru că ne oferă noi perspective asupra unor rezultate cunoscute, ceea ce ne ajută să ne rafinăm capacitatea de a discerne adevărata natură a acestora. Legături făcute de-a lungul unor domenii, şi între acestea, ne dau o imagine mai clară a subiectului nostru – adevărul şi mecanismele prin care ajungem să îl cunoaştem.

Melvin Fitting

City University of New York

Martie 1999, Montrose, New York

Bibliografie

Boolos, George şi Jeffrey, Richard *Computability and Logic*, ediția a treia, Cambridge University Press, 1989.

Boolos, George 'On Second-Order Logic', *The Journal of Philosophy*, Vol. LXXII, Nr. 16, septembrie 18 (1975), pg. 509-527.

Boolos, George şi Sambin, Giovanni 'An Incomplete Modal Logic', *Journal of Philosophical Logic* 14 (1985), pg. 351-358.

Boolos, George 'Reading the *Begriffsschrift*', *Mind*, **94** (1985), pg. 331-44; retipărit în W. Demopoulos (ed.), *Frege's Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1985, pg. 163-181.

Boolos, George 'To Be Is To Be a Value of a Variable (Or To Be Some Values of Some Variables)', *The Journal of Philosophy* (1984), pg. 430-449.

Boolos, George 'Nominalist Platonism', *The Philosophical Review*, XCIV, Nr. 3 (iulie 1985), pg. 327-344.

Boolos, George *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, 1993.

Bowen, Kenneth A. *Model Theory for Modal Logic. Kripke Models for Modal Predicate Calculi*, D. Reidel Publishing Company, 1979.

Bull, Robert A. şi Segerberg, Krister 'Basic Modal Logic', D. Gabbay şi F. Guenthner (ed.) *Handbook of Philosophical Logic*, volumul II: *Extensions of Classical Logic*, D. Reidel Publishing Company, 1984, pg. 1-88.

Chellas, Brian *Modal Logic. An Introduction*, Cambridge University Press, 1980.

Church, A. *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1944, 1956, 1996.

Cocchiarella, Nino B. 'A Completeness Theorem In Second-Order Modal Logic', *Theoria*, vol. XXXV, 1969, partea a II-a, pg. 81-103.

Cresswell, M. J. 'Classical Intensional Logics', *Theoria*, vol. 36, 3: 1970, pg. 347-372.

Cresswell, M. J. 'Incompleteness and the Barcan Formula', *Journal of Philosophical Logic*, 24, 1996, pg. 379-403.

Davis, Martin 'First-Order Logic' D. Gabbay, C. J. Hogger, J. A. Robinson (ed.), *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. Volume 2 - Deduction Methodologies*, Clarendon Press, Oxford, 1994.

Doets, Kees *Basic Model Theory*, CSLI Publications & FoLLI, 1996.

Epstein, Richard *The Semantic Foundation of Logic. Predicate Logic*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1994.

Fine, Kit 'Propositional Quantifiers in Modal Logic', *Theoria*, vol. 36, 3: 1970, pg. 336-346.

Fine, Kit 'An Incomplete Logic Containing S4', *Theoria*, vol. XL, 1974, partea I, pg. 23-29.

Fine, Kit 'An Ascending Chain of S4 Logics' *Theoria*, vol. XL, partea a II-a, 1974, pg. 110-116.

Fine, Kit 'Logics containing K4. Part I', *The Journal of Symbolic Logic*, volumul 39, numărul 1, martie 1974, pg. 31-42.

Fine, Kit 'Some Connections Between Elementary and Modal Logic', Stig Kanger (ed.) *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 82, North-Holland Publishing

Company - Amsterdam, Oxford, American Elsevier Publishing Company, Inc. - New York, 1975, pg. 15-31.

Fine, Kit 'Model Theory for Modal Logic. Part I-The *.DE RE / DE DICTO* Distinction', *Journal of Philosophical Logic* 7 (1978), pg. 125-156.

Fine, Kit 'Model Theory for Modal Logic. Part II-The Elimination of *DE RE* Modality', *Journal of Philosophical Logic* 7 (1978), pg. 277-306.

Fine, Kit 'Model Theory for Modal Logic. Part III - Existence and Predication', *Journal of Philosophical Logic* 10 (1981), pg. 293-307.

Fine, Kit 'Logics containing K4. Part II', *The Journal of Symbolic Logic*, volumul 50, numărul 3, septembrie 1985, pg. 619-651.

Fitting, Melvin *Proof Methods For Modal and Intuitionistic Logics*, D. Reidel Publishing Company, 1983.

Fitting, Melvin 'Modal Logic Should Say More Than It Does', Jean-Louis Lassez & Gordon Plotkin (ed.), *Computational Logic. Essays in Honor of Alan Robinson*, MIT Press, 1991, pg. 113-135.

Fitting, Melvin 'Basic Modal Logic' D. Gabbay, C. J. Hogger, J. A. Robinson (ed.), *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. Volume 1: Logical Foundations*, Clarendon Press, Oxford, 1993, pg. 365-448.

Forbes, Graeme *The Metaphysics of Modality*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

Forbes, Graeme *Languages of Possibility. An Essay in Philosophical Logic*, Aristotelian Society Series, volumul 9, Basil Blackwell, 1989.

Forbes, Graeme *An Introduction to Modal Logic*, Tulane University, 1994.

Forbes, Graeme *Mathematical Logic and the Limits of Computation*, Tulane, 1994, 1996.

Goldblatt, Robert 'First-Order Definability in Modal Logic', *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 40, numărul 1, martie 1975, pg. 35-40.

Goldblatt, Robert *Mathematics of Modality*, CSLI, Stanford, California, 1993.

Hazen, Allen 'Expressive Completeness in Modal Language', *Journal of Philosophical Logic*, 5 (1976), pg. 25-46.

Hughes, G. E. şi Cresswell, M. J. *An Introduction to Modal Logic*, Routledge, London-New York, 1968.

Hughes, G. E. şi Cresswell, M. J. *A Companion to Modal Logic*, Methuen, London-New York, 1984.

Hughes, G. E. şi Cresswell, M. J. 'A Companion to Modal Logic - Some Corrections', *Logique et Analyse, Nouvelle Série*, martie 1986, 113, pg. 41-51.

Hughes, G. E. şi Cresswell, M. J. *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London-New York, 1996.

Jeffrey, Richard *Formal Logic - Its Scope and Limits*. Ediția a treia, McGraw-Hill, Inc., 1991.

Leivant, Daniel 'Higher-Order Logic', D. Gabbay, C. J. Hogger, J. A. Robinson (ed.), *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. Volume 2 - Deduction Methodologies*, Clarendon Press, Oxford, 1994, pg. 229-321.

Lemmon, E. J. şi Scott, Dana 'The "Lemmon Notes". An Introduction to Modal Logic', Krister Segerberg (ed.), *American Philosophy Quarterly*, 1977.

Lindström, Per 'On Extensions of Elementary Logic', *Theoria*, vol. XXXV, partea I, 1969, pg. 1-11.

Manzano, Maria *Extensions of First Order Logic*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 19, Cambridge University Press, 1996.

Parsons, Charles *Mathematics in Philosophy. Selected Essays*, Cornell University Press, Ithaca, New York, 1983.

Quine, W. V. O. *From a Logical Point of View*, Harvard, Cambridge, 1953.

Quine, W. V. O. *Philosophy of Logic*, ediția a doua, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1970, 1986.

Quine, W. V. O. 'Reply to David Kaplan', în L. E. Hahn şi P. A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of W. V. Quine*, LaSalle: Open Court, 1986.

Sahlqvist, Henrik 'Completeness and Correspondence in the First and Second Order Semantics for Modal Logic', Stig Kanger (ed.) *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 82, North-Holland Publishing Company - Amsterdam, Oxford, American Elsevier Publishing Company, Inc. - New York, 1975, pg. 110-143.

Segerberg, Krister *An Essay in Classical Modal Logic*, 3 volume, Uppsala, 1971.

Segerberg, Krister 'That Every Extension of S4.3 is Normal', Stig Kanger (ed.) *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 82, North-Holland Publishing Company - Amsterdam, Oxford, American Elsevier Publishing Company, Inc. - New York, 1975, pg. 194-196.

Shapiro, Stewart 'Second-Order Logic, Foundations, and Rules', *The Journal of Philosophy*, vol. LXXXVII, numărul 5, 1990, pg. 234-261.

Shapiro, Stewart *Foundations Without Foundationalism. A Case for Second Order Logic*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

Smorinski, C. *Self-Reference and Modal Logic*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokio, 1985.

Smullyan, R. M. *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, New York, Oxford, 1992.

Thomason, S. K. 'Semantic Analysis of Tense Logic', *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 37, numărul 1, martie 1972, pg. 150-158.

Thomason, S. K. 'Noncompactness in Propositional Modal Logic', *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 37, numărul 4, decembrie 1972, pg. 716-720.

Thomason, S. K. 'An Incompleteness Theorem in Modal Logic', *Theoria*, vol. XL, partea I, 1974, pg. 30-34.

Thomason, S. K. 'Reduction of Tense Logic to Modal Logic. I', *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 39, numărul 3, septembrie 1974, pg. 549-551.

Thomason, S. K. 'The Logical Consequence Relation of Propositional Tense Logic', *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, vol. 21, 1975, pg. 29-40.

Thomason, S. K. 'Reduction of Second-Order Logic to Modal Logic', *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, vol. 21, 1975, pg. 107-114.

Van Benthem, J. F. A. K. 'A Note on Modal Formulae and Relational Properties', *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 40, numărul 1, martie 1975, pg. 55-58.

Van Benthem, J. F. A. K. 'Two Simple Incomplete Modal Logics', *Theoria*, volumul XLIV, 1978, partea I, pg. 25-37.

Van Benthem, J. F. A. K. 'Syntactic Aspects of Modal Incompleteness Theorems', *Theoria*, volumul XLV, 1979, partea I, pg. 63-77.

Van Benthem, J. F. A. K. 'Tense Logic, Second-Order Logic, and Natural Language', în *Aspects of Philosophical Logic. Some Logical Forays into Central Notions of Linguistics and Philosophy*, ed. Uwe Mönnich, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht Holland, 1981, pg. 1-20.

Van Benthem, J. F. A. K. *Modal Logic and Classical Logic*, Bibliopolis, 1983.

Van Benthem, J. F. A. K. şi Doets, Kees 'Higher-Order Logic', D. Gabbay and F. Guenthner (ed.) *Handbook of Philosophical Logic*, volumul 1, pg. 275-329.

Van Benthem, J. F. A. K. 'Correspondence Theory', D. Gabbay and F. Guenthner (ed.) *Handbook of Philosophical Logic*, Volume II: *Extensions of Classical Logic*, D. Reidel Publishing Company, 1984, pg. 167-248.

Van Benthem, J. F. A. K. 'Notes on Modal Definability', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, volumul 30, numărul 1, iarna 1989, pg. 20-35.

Van Benthem, J. F. A. K. 'Some Kinds of Modal Completeness', *Studia Logica*, XXXIX, 2/3, pg. 123-141.

Index

apartenență 194

Boolos, G. 190, 202 – 205, 211, 214, 215, 219, 225, 226

cadre 11, 24
- cadre generale 53, 64, 65, 110, 149, 150, 152
- cadre generale şi demonstrația de incompletitudine 101 – 104
- cadre Henkin 150
- cadre Kripke 54, 110, 149, 150, 152, 170
- cadre Kripke şi demonstrația de incompletitudine 101 – 104
- cadru general recesiv 67, 83, 171, 183
- cadru tranzitiv 183

comparație între logica de ordinul I şi logica de ordinul al II-lea 114 - 115

completitudine față de cadre 27

completitudine vs. incompletitudine şi definiția validității 105 - 106

completitudinea formulei 159

completitudinea logicii de ordinul al II-lea cu semantică non-standard (Henkin) 109, 131

completitudinea vs. incompletitudinea sistemelor modale în relație cu completitudinea vs. incompletitudinea logicii de ordinul al II-lea 106 - 107

corectitudine semantică 12, 190

corespondență între logica nemodală a predicatelor şi logica modală a propozițiilor 28

demonstrația de caracterizare a sistemelor modale 29

demonstrația de completitudine a sistemelor modale (demonstrația de tip Henkin) 30

demonstrația tip Henkin a completitudinii 12
distincția sisteme modale complete/incomplete în relație cu semantica Henkin 129, 153

explicarea completitudinii unor sisteme modale normale în relație cu logica de ordinul al II-lea 153, 158
extindere conservatoare 180

folosire – menționare; ignorarea acestei distincții ca punct de plecare al ignorării identificării logicii de ordinul al II-lea cu teoria mulțimilor 195
formulă adevărată într-un model 22
formulă incompletă 174, 178
formulă validă într-un cadru 24, 49
formulă validă într-un model 57
Frege, G. 196

incompletitudine modală (non-caracterizabilitate) 11, 12, 15, 16, 55, 151, 163, 178, 186
incompletitudinea formulei 163, 178, 179
incompletitudinea logicii de ordinul al II-lea cu semantică standard 109, 131
interpretare pentru logica modală de ordinul I 20, 190, 207

lexiconul limbajului logicii de ordinul al II-lea 116
logica demonstrabilității 13
logica de ordinul al II-lea 11, 13, 187
  argumentele lui Quine împotriva logicii de ordinul al II-lea 189, 192
  incompletitudinea logicii de ordinul al II-lea 16
  logica de ordinul al II-lea monadică predicativă 175
  relația logicii de ordinul al II-lea cu logica claselor 228
  relația logicii de ordinul al II-lea cu teoria mulțimilor 16, 205, 209, 213, 215, 223, 226 – 228
lumi posibile 21, 52, 216

modalităţi 21, 190
modele 11
model canonic 12, 27, 76
modele canonice şi demonstraţia incompletitudinii 103
modele de ordinul al II-lea 150
modele generale 64, 110, 149, 150
modele Henkin 150, 171
modele Kripke 64, 110, 149, 150
mulţime
concepţia fregeană vs. concepţia iterativă despre mulţimi 191, 215 – 217, 223, 227
concepţia iterativă despre mulţimi 215, 218, 220 – 222, 226 – 228
concepţia naivă despre mulţimi 216, 223 – 225
teoria mulţimilor; relaţia ei cu logica de ordinul al II-lea 16, 205, 209, 213, 215, 223, 226 – 228
mulţime mundană (worldset) 65, 172, 183
mulţimea judecăţilor admisibile; relaţia ei cu demonstraţia incompletitudinii sistemului VB 81, 149

paradoxul lui Russell; relaţia sa cu limbajul logicii de ordinul al II-lea 218, 224
paradoxuri set-teoretice şi teoria Zermelo-Fraenkel a mulţimilor 225
predicaţie 194
prima teoremă de incompletitudine a lui Gödel 12, 174
pseudo-epimorfism (*p*-morfism) 83
puterea expresivă a unui limbaj în relaţie cu puterea expresivă a altui limbaj 179, 181, 182, 186

Quine, W. V. O. 188 – 203, 205, 207 – 209, 212

reguli de inferenţă pentru cuantori de ordinul al II-lea 130

relația incompletitudine modală – semantica standard pentru logica de ordinul al II-lea 129
relația semantică standard – cadre Kripke 110
relația semantică non-standard – cadre generale 110
Russell, B. 196

scheme recursive de traducere 13, 15, 16
semantica tip Kripke 11, 19
corelația semanticii tip Kripke cu semantica de ordinul al II-lea 148
semantici pentru limbajul logicii de ordinul al II-lea 120
semantica Henkin pentru limbajul logicii de ordinul al II-lea 124
semantica standard pentru limbajul logicii de ordinul al II-lea 122
sintaxa limbajului logicii de ordinul al II-lea 118
sistem modal canonic 76
sistem modal complet 14, 49, 50
sistem modal non-canonic 76
sistem modal normal 25
sisteme modale normale incomplete 11, 12, 49, 50
sistemul B 26
sistemul K 25
sistemul S4 26
sistemul S5 26
sistemul T 25
sistemul VB (demonstrarea incompletitudinii) 57
sisteme modale normale incomplete 11, 12, 49, 50
structuri-model de ordinul al II-lea 150, 170, 171

teoria corespondenței modale 154, 163
teoria modelelor pentru logica modală 20
teorie modală 154, 178

traducerea canonică a limbajului logicii modale a propozițiilor în limbajul logicii de ordinul al II-lea 144, 162

validitate într-un cadru 51, 52

validitate într-un model 15, 22, 23, 57

Van Benthem J. F. A. K. 57

Logica modală propoziţională este adesea concepută ca o generalizare a logicii clasice propoziţionale, dar se poate construi un bun argument că cea dintâi trebuie văzută ca o formă restrânsă a logicii clasice de ordinul al doilea! Lucrarea de faţă consideră un aspect interesant al acestei legături de ordinul al doilea, care se leagă de un fenomen curios de incompletitudine.

Pentru a urmări prezentarea problemelor şi a demonstraţiilor care alcătuiesc principalul conţinut al acestei cărţi este nevoie de cunoaşterea doar a câtorva elemente tehnice de fundal. Este suficientă o familiarizare generală cu logica clasică de ordinul întâi. Aparatul tehnic modal propoziţional, semantica de ordinul al doilea, completitudinea şi incompletitudinea, toate sunt prezentate şi discutate cu o deosebită atenţie şi claritate, sub toate aspectele.

Modalitate şi incompletitudine este o carte pe care o pot citi şi nespecialiştii. Investigaţii de genul acesta sunt importante, nu pentru că demonstrează noi teoreme, ci pentru că ne oferă noi perspective asupra unor rezultate cunoscute, ceea ce ne ajută să ne rafinăm capacitatea de a discerne adevărata natură a acestora. Legături făcute de-a lungul unor domenii, şi între acestea, ne dau o imagine mai clară a subiectului nostru – adevărul şi mecanismele prin care ajungem să îl cunoaştem.

Melvin Fitting
City University of New York

Cititorul va găsi în Mircea Dumitru un ghid sigur şi competent pentru acest teren accidentat şi dificil.

Graeme Forbes
Tulane University, New Orleans

Mircea Dumitru este conferenţiar la Catedra de filosofie teoretică şi logică şi în prezent decanul Facultăţii de Filosofie de la Universitatea Bucureşti. Este doctor în filosofie, specializarea logică, al Universităţii Tulane, New Orleans, SUA (mai 1998) şi doctor în filosofie, specializarea filosofia limbajului, al Universităţii din Bucureşti (iulie 1998). Autor al monografiei *On Modal Incompleteness* (UMI, Ann Arbor, 1998), coautor (împreună cu P. Bieltz) al manualului pentru licee *Logică şi Argumentare* (Editura ALL, 1999).

ISBN 973-596-003-6